Université Paris 7-Denis Diderot
M1 mathématiques

Algèbre
Année 2005-06

F. Conduché - M. Couillens - L. Merel

EXAMEN PARTIEL du 26 novembre 2005

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

I

Fixons une racine carrée $\sqrt{-13}$ de -13 dans $\mathbf{C}$. Posons $A = \{a + b\sqrt{-13} \in \mathbf{C}/a, b \in \mathbf{Z}\}$.
1. Démontrer que A est un anneau.
2. Exhiber un isomorphisme d'anneaux $A \to A$ distinct de l'identité.
3. Déterminer le groupe A^* des éléments inversibles de A.
4. Démontrer que 2, 7, $1 + \sqrt{-13}$, $1 - \sqrt{-13}$ sont irréductibles dans A.
5. En déduire que l'anneau A n'est pas factoriel.

II

Soit p un nombre premier. Posons $\mathbf{Z}_{(p)} = \{u/v \in \mathbf{Q}/u \in \mathbf{Z}, v \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}\}$.
1. Rappeler comment $\mathbf{Z}_{(p)}$ s'identifie au localisé de l'anneau $\mathbf{Z}$ par rapport à l'idéal premier $p\mathbf{Z}$.
2. Soit I un idéal de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Démontrer que $I \cap \mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}$. Démontrer que tout idéal non nul de $\mathbf{Z}_{(p)}$ est de la forme $p^n\mathbf{Z}_{(p)}$ avec n entier ≥ 0. L'anneau $\mathbf{Z}_{(p)}$ est-il principal ?
3. Établir qu'on a un isomorphisme de groupes entre $\mathbf{Z}_{(p)}/p^n\mathbf{Z}_{(p)}$ et $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.
4. Soit A un groupe abélien fini d'ordre une puissance de p. Démontrer que l'exposant e de A est une puissance de p.
5. Démontrer que A est muni d'une structure de $\mathbf{Z}_{(p)}$-module en faisant agir $u/v \in \mathbf{Z}_{(p)}$ sur $a \in A$ par $(u/v).a = uwa$, où $w \in \mathbf{Z}$ vérifie $wv \equiv 1 \pmod{e}$.
6. Démontrer que A comme groupe abélien est isomorphe à un produit de groupes cycliques d'ordre des puissances de p. Notons p^{n_1}, ..., p^{n_r} ces puissances, avec $n_1 \leq ... \leq n_r$.
7. Démontrer que A est isomorphe, comme $\mathbf{Z}_{(p)}$-module, à $\mathbf{Z}_{(p)}/p^{n_1}\mathbf{Z}_{(p)} \times ... \times \mathbf{Z}_{(p)}/p^{n_r}\mathbf{Z}_{(p)}$.

III

Soit K_0 un corps de caractéristique 0. Soient P, Q et $R \in K_0[X]$ des polynômes scindés, non constants et deux à deux premiers entre eux tels que

$$P + Q = R.$$

Notons $z_0(PQR)$ le nombres de zéros distincts de $PQR \in K_0[X]$.
1. Les polynômes P, Q et R ont-ils des zéros communs ?
2. En posant dans $K_0(X)$, $F = P/R$ et $G = Q/R$, démontrer qu'on a $F' + G' = 0$, puis que $Q/P = -\frac{F'/F}{G'/G}$.
3. Posons $P = a\prod_{i \in I}(X - a_i)^{n_i}$, $Q = b\prod_{j \in J}(X - b_j)^{m_j}$ et $R = c\prod_{k \in K}(X - c_k)^{l_k}$, où a, b, $c \in K_0^*$ et où les familles finies $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$, $(c_k)_{k \in K}$ décrivent des élément distincts de K_0 et les familles $(n_i)_{i \in I}$, $(m_j)_{j \in J}$, $(l_k)_{k \in K}$ décrivent des entiers ≥ 1. Calculer P'/P, Q'/Q et R'/R. En déduire F'/F et G'/G.
4. En posant alors $N = \prod_{i \in I}(X - a_i)\prod_{j \in J}(X - b_j)\prod_{k \in K}(X - c_k)$, montrer que NF'/F et NG'/G sont des polynômes de degrés $< z_0(PQR)$.
5. En déduire que les degrés de P, Q et R sont majorés strictement par $z_0(PQR)$.
6. En déduire que si U, V, $W \in \mathbf{C}[X]$ sont non constants, premiers entre eux et vérifient $U^n + V^n = W^n$, on a $n \leq 2$.