Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Algèbre
Année 2017-18

L. Merel, J.-F. Mestre

EXAMEN du 25 juin 2018

Durée : 3h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

On note L le corps de décomposition dans $\mathbf{C}$ du polynôme $P(T) = T^4 - 3T - 3$. Notons G le groupe de Galois de l'extension $L|\mathbf{Q}$.
1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
2. Montrer que P admet deux racines réelles x et y et deux racines complexes non réelles z et $\bar{z}$ conjuguées l'une de l'autre.
3. Montrer que $P(T)$ s'écrit comme produit de deux polynômes unitaires de $\mathbf{R}[T]$, que l'on notera $T^2 + aT + b$ et $T^2 + a'T + b'$.
4. Montrer que $a' = -a$ et que a est racine du polynôme $X^6 + 12X^2 - 9$.
5. Montrer que le polynôme $Y^3 + 12Y - 9$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$. On pourra montrer que toutes ses racines rationnelles sont entières, qu'elles divisent 9.
6. Quel est le degré de a^2 sur $\mathbf{Q}$? Montrer que L contient un élément de degré 3 sur $\mathbf{Q}$.
7. Montrer que le degré de L sur $\mathbf{Q}$ est divisible par 12, puis que 12 divise l'ordre de G.
8. Montrer que G s'identifie à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$. En déduire que G est d'ordre 12 ou 24.
9. Montrer que $\mathcal{S}_4$ n'a qu'un seul sous-groupe d'ordre 12 : son sous-groupe alterné.
10. Montrer que G a un élément qui agit comme une transposition sur les racines de P.
11. En déduire que G est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.
12. Montrer que L a un unique sous-corps K qui est quadratique sur $\mathbf{Q}$.

II

On considère $\phi : \mathbf{C}[X,Y] \to \mathbf{C}[T]$ qui à $P(X,Y)$ associe $P(T^2,T^3)$.
1. Indiquer brièvement pourquoi ϕ est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{C}[X,Y]$, il existe $Q \in \mathbf{C}[X,Y]$, $R_2, R_1, R_0 \in \mathbf{C}[Y]$ tel que $P(X,Y) = (X^3 - Y^2)Q + R_2X^2 + R_1X + R_0$.
3. En déduire que le noyau de ϕ est l'idéal engendré par le polynôme $X^3 - Y^2$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbf{C} + T^2\mathbf{C}[T]$.
5. L'anneau $\mathbf{C}[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ est-il intègre ?
6. Montrer que T^2 et T^3 sont irréductibles dans $\mathrm{Im}(\phi)$.
7. En déduire que l'anneau quotient $\mathbf{C}[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ n'est pas factoriel.
8. En donner un idéal non principal.