Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Fonctions analytiques
Année 2011-12
L. Merel

EXAMEN du 25 juin 2012

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} i^{n^2} z^n$.

2. La fonction $z \mapsto |z| + z$ est-elle holomorphe sur $\mathbf{C}$?

3. Soit f une fonction entière telle que la fonction $z \mapsto e^{f(z)}$ est bornée sur $\mathbf{C}$. Montrer que f est constante.

4. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq e^{-n}$ (n entier > 0 et z un nombre complexe tel que $|z| = n$). Montrer que f est constante.

5. Existe-t-il une fonction entière qui s'annule exactement en $\{e^{-n}/n \in \mathbf{Z}, n > 0\}$?

6. Considérons la fonction d'une variable complexe $f : z \mapsto \frac{3z+2}{2z+3}$. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Montrer que $|f(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$. En déduire que $|f(z)| < 1$ lorsque $|z| < 1$.

7. Soient z_1, z_2,..., z_n des nombres complexes distincts. Montrer qu'il existe une fonction entière dont les pôles sont tous simples et sont précisément z_1, z_2,...,z_n. Deux telles fonctions ayant les mêmes résidus en chacun des points z_1, z_2,..., z_n sont-elles nécessairement égales ?

8. Soit R un nombre réel > 0. Considérons l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} dz.$$

Pour quelles valeurs de R est-elle définie ? La calculer en fonction de R.

9. Quels sont les pôles et les résidus de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^4+z^2+1}$? Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^4 + z^2 + 1} dz.$$

10. Quel est l'indice du lacet c composé des chemins $t \mapsto e^{2i\pi t}$, $t \mapsto 1 + t$, $t \mapsto 2e^{-2i\pi t}$, $t \mapsto 2 - t$ par rapport au point 0 ? (Faire un dessin.) Calculer $\int_c (e^{\sin(z^2)e^{z+z^3}}/z)\, dz$.