Université Paris Diderot — Algèbre
Licence de Mathématiques — Année 2014-15
A. Prouté, L. Merel

**EXAMEN du 24 Juin 2015**

**Durée : 3h**

*Tout appareil électronique est interdit. Document autorisé : une feuille manuscrite.*

## I

1. Quels sont les ordres du groupe symétrique $\mathcal{S}_6$ et de son sous-groupe alterné $\mathcal{A}_6$ ? On donnera la factorisation de ces ordres en produit de nombres premiers.
2. Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_6$ et $\mathcal{A}_6$ ?
3. En utilisant la décomposition en cycles à supports disjoints, donner les ordres possibles des éléments de $\mathcal{S}_6$.
4. Montrer que $\mathcal{A}_6$ admet un sous-groupe $H$ d'ordre 9 isomorphe au produit de deux groupes cycliques d'ordre 3.
5. Montrer que c'est un sous-groupe de Sylow de $\mathcal{A}_6$.
6. Montrer que tout sous-groupe d'ordre 9 de $\mathcal{A}_6$ est conjugué à un tel sous-groupe.
7. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_6$. Montrer que si $H$ est engendré par deux 3-cycles à supports disjoints, $\sigma H \sigma^{-1}$ est engendré par deux 3-cycles à supports disjoints.
8. Combien y a-t-il de paires de 3-cycles à supports disjoints dans $\mathcal{A}_6$ ?
9. En déduire le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{A}_6$.
10. Quels sont les 3-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_6$ ?

## II

Soit $A$ un anneau commutatif à 4 éléments. Notons $\mathbf{F}_2$ le corps $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Pour $P$ polynôme sur $\mathbf{F}_2$, on note $(P)$ l'idéal de l'anneau $\mathbf{F}_2[X]$ engendré par $P$ et $\mathbf{F}_2[X]/(P)$ l'anneau quotient correspondant.

1. Faire la liste des quatre polynômes de degré 2 sur $\mathbf{F}_2$.
2. Factoriser ces polynômes en produit de facteurs irréductibles.
3. Combien y a-t-il d'éléments de carré nul dans l'anneau $\mathbf{F}_2[X]/(X^2)$ ?
4. En déduire que l'anneau $\mathbf{F}_2[X]/(X^2)$ n'est ni un corps ni isomorphe à l'anneau produit $\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2$.
5. Montrer que l'application $P \mapsto P(X+1)$ envoie l'idéal $(X^2)$ sur l'idéal $(X^2+1)$. En déduire que les anneaux $\mathbf{F}_2[X]/(X^2)$ et $\mathbf{F}_2[X]/(X^2+1)$ sont isomorphes.
6. Montrer que l'anneau $\mathbf{F}_2[X]/(X^2+X)$ est isomorphe à l'anneau produit $\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2$.
7. Montrer que la caractéristique de $A$ est 2 ou 4.
8. Montrer que si $A$ est de caractéristique 4, c'est un anneau isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
9. Supposons désormais que la caractéristique de $A$ est 2. Montrer qu'il existe $a \in A - \{0,1\}$ tel que $A = \{0, 1, a, a+1\}$.
10. Montrer que $a$ est racine d'un polynôme de degré 2 sur $A$.
11. En déduire que l'anneau $A$ est isomorphe à $\mathbf{F}_2[X]/(P)$ où $P$ est un polynôme de degré 2 sur $\mathbf{F}_2$.