Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Algèbre
Année 2018-19

L. Merel, J.-F. Mestre

CONTRÔLE du 23 octobre 2018

Durée : 2h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Posons $M = \mathbf{Z}^{2018} \times \mathbf{Z}/2018\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/2018\mathbf{Z})^*$. On précise que le nombre 1009 est premier.
1. Quel est l'ordre de la partie de torsion de M ?
2. Le groupe M admet-il un sous-groupe fini d'ordre 2019 ?
3. Donner les diviseurs élémentaires et les facteurs invariants de la partie de torsion de M.
4. Soit N un sous-groupe d'indice fini de M. Quel est son rang ?
5. Quelle est la dimension du $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel $M/2M$?

II

Soit A un anneau intègre. On dit qu'il est *de Bézout* s'il vérifie la propriété dite de Bézout suivante : pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe $(u, v) \in A^2$ tel que $au + bv$ soit un pgcd de a et b.
6. Montrer que tout anneau principal est de Bézout.
7. Montrer que, lorsque K est un corps, l'anneau $K[X, Y]$ n'est pas de Bézout.
8. Si A est un anneau de Bézout, l'anneau $A[X]$ est-il en général de Bézout ?
9. Montrer que tout idéal de type fini de A est principal lorsque A est de Bézout.
10. Montrer que tout anneau noethérien et de Bézout est principal.

III

Supposons A factoriel et de Bézout. Soit I un idéal de A. Soit $a \in I - \{0\}$ ayant un nombre (compté avec multiplicités) minimal de facteurs irréductibles.
11. Soit $b \in I$. Soit d un pgcd de a et b. Montrer que $d \in I$.
12. En déduire que $dA = aA$.
13. En déduire que A est principal.
14. Montrer que $B = \{P \in \mathbf{Q}[X]/P(0) \in \mathbf{Z}\}$ est un anneau (il est en fait de Bézout).
15. L'idéal $I = \{P \in B/P(0) = 0\}$ est-il principal ? Est-il de type fini ?

IV

Supposons A de Bézout. Soit n un entier ≥ 1. Soit M un sous-module de type fini de A^n. Notons $\pi_1 : A^n \to A$ la projection sur la première coordonnée
16. Montrer que pour $n = 1$, M est libre.
17. Posons $I_1 = \pi_1(M)$. Montrer que c'est un idéal de type fini.
18. Montrer qu'il existe $x \in M$ tel que $I_1 = A\pi_1(x)$.
19. Posons $M_1 = \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap M$. Montrer que si I_1 est non nul, on a $Ax \oplus M_1 = M$.
20. Montrer que M_1 est isomorphe à un sous-module de A^{n-1}.
21. Montrer par récurrence sur n que M est libre.