Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Arithmétique
Année 2010-11
L. Merel

EXAMEN du 22 juin 2011

Durée : 3 h

L'usage de tout appareil électronique et de tout document autre que des notes de cours est interdit.

Soit $\zeta = e^{2i\pi/11} \in \mathbf{C}$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on note $\left(\frac{n}{11}\right)$ le symbole de Legendre de n modulo 11. Posons $S = \sum_{n=1}^{12} \left(\frac{n}{11}\right)\zeta^n$. Notons $\mathbf{Q}(\mu_{11})$ le corps cyclotomique engendré par ζ. Notons $\mathbf{Z}[\mu_{11}]$ le sous-anneau de $\mathbf{Q}(\mu_{11})$ engendré par ζ.

On admet que 2011 est un nombre premier. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $\mathbf{Z}[\mu_{11}]$ contenant 2011. Notons $\mathbf{F}$ le corps quotient $\mathbf{Z}[\mu_{11}]/\mathcal{M}$. Notons ϕ l'application $\mathbf{F} \to \mathbf{F}$ qui à x associe x^p. Notons ζ_{2011} l'image de ζ dans $\mathbf{F}$. Notons S_{2011} l'image de S dans $\mathbf{F}$.

Pour $s \in \mathbf{C}$, on pose $L(s) = \sum_{n\geq 1, 11 \not| n} \left(\frac{n}{11}\right) n^{-s}$, lorsque cette série converge.

1. Donner la liste des carrés dans $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})$.
2. Le nombre premier 2011 est-il un carré modulo 11 ? L'entier 11 est-il un carré modulo 2011 ?
3. Quelle est la densité de l'ensemble des nombres premier p tels que 11 est un carré modulo p ?
4. Quelle est la densité de l'ensemble des nombres premiers p tels que 11 est un carré dans un corps à p^2 éléments ?
5. Calculer S^2.
6. Déterminer le signe de la partie imaginaire de S. En déduire S.
7. Quels sont les sous-groupes de $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*$?
8. En déduire les sous-corps du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\mu_{11})$.
9. Lesquels de ces corps sont contenus dans $\mathbf{R}$?
10. Y a-t-il un corps quadratique parmi ces sous-corps ?
11. Montrer que $S \in \mathbf{Z}[\mu_{11}]$.
12. Quelle est la caractéristique du corps $\mathbf{F}$? Quel est son nombre d'éléments ?
13. Montrer que l'ensemble des éléments fixes de $\mathbf{F}$ par ϕ est un corps à 2011 éléments.
14. Montrer que $\phi(S_{2011}) = \left(\frac{2011}{11}\right)S_{2011}$.
15. Montrer que S_{2011} appartient à un sous-corps à 2011^2 éléments de $\mathbf{F}$. Retrouver ainsi que 11 n'est pas un carré modulo 2011.
16. Rappeler pourquoi la série L converge absolument lorsque s est un nombre complexe de partie réelle > 1.
17. Écrire L comme un produit portant sur les nombres premiers.
18. Existe-t-il $\sigma_0 \in \mathbf{R}$, $\sigma_0 < 1$ tel que L se prolonge en une fonction holomorphe (encore notée L) sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C}/\Re(s) > \sigma_0\}$?
19. A-t-on alors $L(1) = 0$?
20. Calculer $L(1)$.