Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Arithmétique
Année 2012-13
L. Merel

EXAMEN du 22 mai 2013

Durée : 3 h

L'usage de tout appareil électronique et de tout document autre que des notes de cours est interdit.

Exercice 1

1. Décomposer 2013 en produit de facteurs premiers.
2. Quel est l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/2013\mathbf{Z})^*$?
3. Le groupe $(\mathbf{Z}/2013\mathbf{Z})^*$ est-il cyclique ?
4. Combien a-t-il de sous-groupes d'indice 2 ?
5. Écrire les polynômes cyclotomiques Φ_d, pour $d|2013$ comme des fractions rationnelles.
6. Quel est le degré du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\mu_{2013})$ engendré par les racines 2013-èmes de l'unité sur $\mathbf{Q}$?
7. Combien $\mathbf{Q}(\mu_{2013})$ a-t-il de sous-corps quadratiques ?
8. Soit p un nombre premier impair. Posons $p^* = p$ si p est congru à 1 modulo 4 et $p^* = -p$ si p est congru à -1 modulo 4. Déterminer trois nombres premiers p tels que le corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{p^*})$ est contenu dans $\mathbf{Q}(\mu_{2013})$.
9. Déterminer tout les entiers d sans facteur carré tels que $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ est contenu dans $\mathbf{Q}(\mu_{2013})$.
10. Soit $a \in (\mathbf{Z}/2013\mathbf{Z})$. Montrer que c'est un carré si et seulement si c'est un carré modulo 3, 11 et 61.
11. Le nombre 22 est-il un carré modulo 2013 ?
12. Combien y-a-t-il de carrés dans $(\mathbf{Z}/2013\mathbf{Z})^*$?
13. Quelle est la densité analytique de l'ensemble formé par les nombres premiers qui sont des carrés modulo 2013 ?

Exercice 2

Pour n entier > 0, posons $\sigma(n) = \sum_{d|n,d>0} 1/d$. Considérons la série de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)n^{-s}$. Notons ζ la fonction de Riemann.

1. Soient n et m deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.
2. Soient p un nombre premier et e un entier ≥ 0. Montrer que $\sigma(p^e) = (p^{e+1} - 1)/((p-1)p^e)$.
3. Soit n un entier ≥ 1 de décomposition en produit de facteurs premiers donnée par $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$. Exprimer $\sigma(n)$ et calculer $\sigma(2013)$.
4. Montrer qu'on a l'identité de séries de Dirichlet $D(s) = \zeta(s)\zeta(s+1)$.
5. En déduire que la série D converge sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C}/\Re(s) > 1\}$ et que D se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$.
6. Quels sont les pôles de D ? Montrer que ses zéros sont entiers < -1 ou de partie réelle dans l'intervalle $]-1, 1[$.
7. Pour k entier ≥ 1, notons p_k le k-ème nombre premier. Montrer que p_k est équivalent à $k \log(k)$ lorsque k tend vers l'infini.
8. Posons $n_k = p_1p_2...p_k$. Montrer que la suite $(\sigma(n_k))_{k\geq 1}$ tend vers l'infini.
9. Posons $E(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s)$. Montrer qu'on a $E(s) = E(-s)$.
10. La fonction E s'annule-t-elle sur la droite formée par les nombres complexes de partie réelle égale à 0 ?