Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Algèbre
Année 2013-14

F. Liret, L. Merel

EXAMEN PARTIEL du 19 Novembre 2013

Durée : 2h30

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Seul document autorisé : une feuille manuscrite.

Exercice 1

Soit G un groupe d'ordre 12. Notons n_p le nombre de ses p-sous-groupes de Sylow, pour p nombre premier.

1. Donner les cardinaux des p-sous-groupes de Sylow de G suivant la valeur du nombre premier p.
2. Montrer que n_3 vaut 1 ou 4 et que n_2 vaut 1 ou 3.
3. Montrer qu'on ne peut avoir simultanément $n_3 = 4$ et $n_2 = 3$.
4. Donner des exemples de groupes qui satisfont successivement $n_2 = 3$, $n_3 = 4$ et $n_2 = n_3 = 1$.
5. Montrer que si $n_3 = 1$ et $n_2 = 1$, le groupe G est isomorphe au produit d'un groupe G_3 d'ordre 3 et d'un groupe G_2 d'ordre 4. Montrer que G_2 est cyclique ou isomorphe au produit de deux groupes d'ordre 2.

Exercice 2

Soit $\sigma_0 \in \mathcal{S}_{12}$ donné par $\sigma_0(1) = 3$, $\sigma_0(2) = 4$, $\sigma_0(3) = 5$, $\sigma_0(4) = 6$, $\sigma_0(5) = 1$, $\sigma_0(6) = 8$, $\sigma_0(7) = 9$, $\sigma_0(8) = 10$, $\sigma_0(9) = 11$, $\sigma_0(10) = 2$, $\sigma_0(11) = 12$ et $\sigma_0(12) = 7$.

Considérons l'application $f : \mathcal{S}_6 \to \mathcal{S}_{12}$ qui à σ associe $f(\sigma) = \tau$ défini ainsi $\tau(i) = \sigma(i)$ si on a $1 \leq i \leq 6$ et $\tau(i) = \sigma(i-6) + 6$ si on a $7 \leq i \leq 12$.

1. Décomposer σ_0 en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature et l'ordre de σ_0.
3. Le groupe $\mathcal{S}_{12}$ possède-t-il des éléments d'ordre 18 ? D'ordre 22 ?
4. Montrer que f est bien définie et un homomorphisme de groupes.
5. Montrer que f est injective.
6. Montrer que l'image d'une transposition par f est une double transposition. En déduire que l'image de f est contenue dans le groupe alterné $\mathcal{A}_{12}$.
7. Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_{12}$ possède des sous-groupes isomorphes à $\mathcal{A}_6$ et $\mathcal{S}_6$. Ces sous-groupes sont-il distingués dans $\mathcal{A}_{12}$? Le groupe $f(\mathcal{A}_6)$ est-il distingué dans $f(\mathcal{S}_6)$?

Exercice 3

Soit p un nombre premier. Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq p-1$. Considérons l'ensemble $E_{p+i} = \{1, 2...p+i\}$.

1. Montrer que la plus grande puissance de p qui divise $(p+i)!$ est p.
2. Montrer que tout p-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique $\mathcal{S}_{p+i}$ est d'ordre p.
3. En déduire que tout p-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique $\mathcal{S}_{p+i}$ est engendré par un cycle d'ordre p.
4. Montrer que E_{p+1} possède $p+1$ sous-ensembles de cardinal p.
5. Soit A une partie de E_{p+1} de cardinal p. Montrer qu'il y a $(p-2)!$ sous-groupes d'ordre p du groupe $\mathcal{S}(A)$ des permutations de A.
6. En déduire qu'il y a $(p-2)!(p+1)$ p-sous-groupes de Sylow dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_{p+1}$.
7. En déduire les congruences $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$ et $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ (théorème de Wilson).
8. Les p-sous-groupes de Sylow de $\mathcal{S}_{2p}$ sont-ils cycliques ?