Université Paris Diderot — Algèbre
Master de Mathématiques — Année 2019-20
E. Letellier, L. Merel

CONTRÔLE du 18 octobre 2019

Durée : 2h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Soit j une racine 3-ème primitive de l'unité dans $\mathbf{C}$. Posons $\mathbf{Z}[j] = \{a + bj/a, b \in \mathbf{Z}\}$ et $\mathbf{Q}(j) = \{a + bj/a, b \in \mathbf{Q}\}$. Pour $a, b \in \mathbf{R}$, posons $\mathrm{N}(a + bj) = (a + bj)(a + bj^2)$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[j]$ est un anneau.
2. Montrer que, pour $z, z' \in \mathbf{Z}[j]$, on a $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)N(z')$.
3. Montrer que si z est inversible dans $\mathbf{Z}[j]$, on a $\mathrm{N}(z) = 1$.
4. En déduire que les inversibles de $\mathbf{Z}[j]$ sont 1, -1, j, $-j$, j^2 et $-j^2$.
5. Montrer que tout nombre complexe s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathbf{Z}[j]$ et d'un nombre complexe z tel que $\mathrm{N}(z) < 1$.
6. Soit $z \in \mathbf{Z}[j]$ et $d \in \mathbf{Z}[j]$, $d \neq 0$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbf{Z}[j]$ et $r \in \mathbf{Z}[j]$ tels que $z = dq + r$ avec $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(d)$.
7. En déduire que $\mathbf{Z}[j]$ est un anneau euclidien.
8. L'anneau $\mathbf{Z}[j][X]$ est-il factoriel ?

II

Pour n entier ≥ 3, posons dans $\mathbf{Z}[j][X]$: $P_n = X^n + (1-j)X + 3$ et $\bar{P}_n = X^n + (1-j^2)X + 3$.

9. Soient α, β, γ les racines de P_3 dans $\mathbf{C}$. Calculer $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma$.
10. Montrer que $1 - j$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[j]$.
11. Montrer que P_3 a des racines multiples dans le corps $\mathbf{Z}[j]/(1 - j)$.
12. L'élément 2 est-il premier dans $\mathbf{Z}[j]$?
13. Montrer que $k = \mathbf{Z}[j]/(2)$ est un corps à 4 éléments formé des classes de 0, 1, j, j^2.
14. Pour n entier non congru à 1 modulo 3, montrer que P_n est sans racine dans k.
15. En déduire que P_3 est irréductible sur $\mathbf{Z}[j]$.

III

16. Montrer que $Q_n = P_n\bar{P}_n$ appartient à $\mathbf{Z}[X]$.
17. Montrer que, si P_n est irréductible dans $\mathbf{Z}[j][X]$, $\bar{P}_n$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[j][X]$, puis que Q_n est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.
18. Soit A un anneau factoriel. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$. Soit $p \in A$ un élément irréductible. Supposons que $a_n = 1$, que $p|a_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que si p^2 ne divise pas a_1, P est irréductible dans $A[X]$ ou possède une racine dans A.
19. Lorsque n est ≥ 4, montrer que le polynôme P_n est sans racine dans $\mathbf{Z}[j]$.
20. En déduire que P_n est irréductible sur $\mathbf{Z}[j]$ pour tout $n \geq 3$.