Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Fonctions analytiques
Année 2010-11
L. Merel

EXAMEN PARTIEL du 18 mars 2011

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

On désigne par $\Re(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z. On note $\mathcal{C}(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$ et $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$.

Exercice 1

Soit $U = \mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$.
1. Montrer que U est ouvert dans $\mathbf{C}$. Est-il connexe ? Est-il compact ?
2. Montrer que la fonction $f : z \mapsto e^z/(e^z - 1)$ est définie sur U. Montrer qu'elle est holomorphe sur U.
3. La fonction f est-elle injective sur U ?
4. Montrer que la fonction $a \mapsto a/(a-1)$ définit une bijection de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$.
5. Quelle est l'image de U par f ?
6. Montrer que la fonction $z \mapsto zf(z)$ admet un prolongement holomorphe en 0, dont on donnera les deux premiers coefficients de la série de Taylor en 0.
7. Quel est le rayon de convergence du développement en série entière de f en $i\pi$?
8. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,\pi)} f(z)dz$.
9. Montrer que la fonction $z \mapsto f(z) - 1/z - 1/(z-2i\pi) - 1/(z+2i\pi)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur la boule de centre 0 et de rayon 3π.
10. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,3\pi)} f(z)dz$.
11. La fonction f admet-elle une primitive sur $B(0,\pi) - \{0\}$?
12. Admet-elle une primitive sur le demi-plan $\{z \in \mathbf{C}/\Re(z) > 0\}$?

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe et non vide U de $\mathbf{C}$.
1. Supposons que $U = \mathbf{C}$ et que $|f(z)| < |g(z)|$ $(z \in \mathbf{C})$. Montrer que f/g est holomorphe. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $g = \lambda f$.
2. Supposons que $U = \mathbf{C}$ et que $|f(z)| \leq |g(z)|$ $(z \in \mathbf{C})$. Montrer que f/g définit une fonction entière. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $g = \lambda f$.
3. Supposons que $|f(z)| \leq |g(z)|$ $(z \in U)$. Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = g(z_0)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $g = \lambda f$.
4. Supposons que e^f est constante. Montrer que f est constante.
5. Supposons que $U = \mathbf{C}$ et que $\Re(f(z)) \leq \Re(g(z))$ $(z \in \mathbf{C})$. Montrer que $|e^{f(z)}| \leq |e^{g(z)}|$ $(z \in \mathbf{C})$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $g = \lambda + f$.
6. Supposons que $\Re(f(z)) \leq \Re(g(z))$ $(z \in U)$. Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = g(z_0)$. Montrer que $g = f$.
7. Donner un exemple de fonctions f et g et d'ouvert U non borné tels que $|f(z)| < |g(z)|$ $(z \in U)$ et f non proportionnelle à g.
8. Supposons que $U = \mathbf{C}$ et que $f(z) = g(z)$ $(z \in \mathbf{Q})$. A-t-on $f = g$?
9. Supposons que $U = \mathbf{C}$ et que $|f(z)| = |g(z)|$ $(z \in \mathbf{R})$. A-t-on $f = g$?
10. Supposons que $U = \{z \in \mathbf{C}/\Re(z) > 0\}$. Exhiber f non nulle telle que $f(1/n) = 0$ (n entier > 0).
11. L'ensemble $E = \{n + i/n / n \in \mathbf{Z}, n > 0\}$ admet-il des points d'accumulation dans $\mathbf{C}$? Y a-t-il une fonction entière non nulle qui s'annule sur E ?
12. Supposons que $U = B(0,1)$. L'ensemble $E = \{e^{in-1/n}/n \in \mathbf{Z}, n > 0\}$ admet-il des points d'accumulation dans U ? Y a-t-il une fonction holomorphe sur U non nulle qui s'annule sur E ?