Université Paris 7-Denis Diderot
Licence de mathématiques et informatique

Algèbre et géométrie
Année 2004-05
L. Merel - M. Fouquet

EXAMEN du 16 décembre 2004

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

1. Considérons le polynôme $X^2+1 \in \mathbf{F}_3[X]$. Montrer qu'il est irréductible. En déduire que l'anneau $\mathbf{F}_3[X]/(X^2+1)$ est un corps à 9 élément, que nous noterons $\mathbf{F}_9$. Combien le polynôme X^2+1 a-t-il de racines dans $\mathbf{F}_9$? Fixons l'une de ces racines et notons-la i.
2. Le corps $\mathbf{F}_9$ est-il contenu dans un corps à 27 éléments ? Est-il contenu dans un corps à 81 éléments ?
3. Montrer que tout élément x de $\mathbf{F}_9$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = a + ib$ avec a, $b \in \mathbf{F}_3$. On pose alors $\bar{x} = a - ib$.
4. Démontrer qu'on a $x^3 = \bar{x}$ et que $x\bar{x} \in \mathbf{F}_3$ ($x \in \mathbf{F}_9$). Combien y a-t-il d'élément $x \in \mathbf{F}_9$ tels que $x\bar{x} = 0$, $x\bar{x} = 1$, $x\bar{x} = -1$?
5. Considérons $A = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} / a, b \in \mathbf{F}_9\}$. Montrer que c'est un sous-anneau de $M_2(\mathbf{F}_9)$.
6. L'anneau A est-il commutatif ? Est-il intègre ? Est-ce un corps à 81 éléments ?
7. Démontrer que l'application $A^* \to \mathbf{F}_3^*$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ associe $a\bar{a} + b\bar{b}$ est un homomorphisme de groupes. Démontrer que $T = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in A / a\bar{a} + b\bar{b} = 1\}$ est un sous-groupe distingué de A^*. Combien T a-t-il d'éléments ? Combien A^* a-t-il d'éléments ?
8. Quel est l'ordre de $\mathbf{F}_9^*$? Quel est l'ordre du sous-groupe de $\mathbf{F}_9^*$ engendré par i ? Démontrer que le polynôme $X^4 + 1 \in \mathbf{F}_3[X]$ est réductible. Montrer que $1 + i$ est un générateur de $\mathbf{F}_9^*$.
9. Soit $\mathbf{F}_{81}$ un corps à 81 éléments contenant $\mathbf{F}_9$. Posons $\mathcal{H} = \mathbf{F}_{81} - \mathbf{F}_9$. Montrer qu'on a une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_9)$ sur l'ensemble $\mathcal{H}$ donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

10. Démontrer qu'il existe $\sqrt{1+i} \in \mathbf{F}_{81}$ tel que $(\sqrt{1+i})^2 = 1 + i$ et que $\sqrt{1+i} \notin \mathbf{F}_9$. Démontrer que l'orbite de $\sqrt{1+i}$ sous $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_9)$ est $\mathcal{H}$.