Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Géométrie affine et euclidienne
Année 2010-11
F. Liret, L. Merel

EXAMEN du 15 juin 2011

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine euclidien. Notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, r le rayon de $\mathcal{C}$ et H l'orthocentre de ABC. Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A, B et C. Notons M_A le symétrique orthogonal de M par rapport à la droite (BC). On définit de même les points M_B et M_C symétriques de M par rapport aux droites (CA) et (AB) respectivement. Notons K_A, K_B et K_C les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement.

1. Faire une figure.
2. Montrer qu'on a l'égalité d'angles de vecteurs $\widehat{CMB} = \widehat{BM_AC}$.
3. Montrer qu'on a l'égalité d'angles de droites $\widehat{(CH),(BH)} + \widehat{(CA),(BA)} = \widehat{0}$.
4. En déduire que que les points H, M_A, B et C sont cocycliques.
5. Montrer que le cercle $\mathcal{C}'$ qui passe par H, M_A, B et C est symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (BC).
6. Quel est le rayon de $\mathcal{C}'$?
7. Montrer que les points H, M_A et M_B sont alignés, puis que les points H, M_A, M_B et M_C sont alignés.
8. Montrer que les points K_A, K_B et K_C sont alignés.

Exercice 2

Soit ABC un triangle d'un plan affine euclidien $\mathcal{E}$. Notons I le milieu du segment $[B, C]$. Soient B', C', U et V des points tels que les quadrilatères $ACC'V$ et $AUB'B$ soient des carrés (les carrés sont extérieurs au triangle de telle sorte que les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AV}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AU}$ sont négatifs). Notons O le centre du carré $ACC'V$. Notons r la rotation de $\mathcal{E}$ de centre O qui transforme C en A. Notons $\overrightarrow{r}$ son application linéaire associée. Posons $W = r(B)$. Notons A' le point tel que $BACA'$ est un parallélogramme.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AU}$. En déduire que $\overrightarrow{VW} = \overrightarrow{AU}$.
3. Montrer que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. En déduire que $\overrightarrow{r}(2\overrightarrow{AI}) = \overrightarrow{VU}$.
4. Montrer que les droites (UV) et (AI) sont orthogonales, puis que $UV = 2AI$.
5. Montrer que les droites (BV) et (CU) sont orthogonales, puis que $UC = BV$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. On appelle *forme affine* une application affine $\mathcal{E} \to \mathbf{R}$. Soient f_0 et f_1 des formes affines non constantes. Posons $\mathcal{D}_0 = \{M \in \mathcal{E} / f_0(M) = 0\}$ et $\mathcal{D}_1 = \{M \in \mathcal{E} / f_1(M) = 0\}$. Supposons que l'intersection $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$ est réduite à un point P. Soit $\mathcal{D}'$ une droite passant par P et distincte de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.

0. Soit f une forme affine non constante. Montrer que $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} / f(M) = 0\}$ est une droite affine. On dit alors que f est une *équation de* $\mathcal{D}$.
1. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine. Montrer qu'il existe $(a_0, a_1, b) \in \mathbf{R}^3$ tels que $a_0 f_0 + a_1 f_1 + b$ soit une équation de $\mathcal{D}$. À quelle condition sur a_0, a_1 et b a-t-on $P \in \mathcal{D}$? À quelle condition sur a_0, a_1 et b les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_0$ sont-elles sécantes ?
2. Soient $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Montrer qu'on a $f_0(M) = f_0(N)$ et $f_1(M) = f_1(N)$ si et seulement si $M = N$.
3. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbf{R}$ tel que $f_0 + k f_1$ est une équation de $\mathcal{D}'$.
4. Soit $\mathcal{D}''$ une droite qui passe par P et telle que pour tout $I \in \mathcal{D}'$, $I \neq P$, la droite parallèle à $\mathcal{D}''$ passant par I coupe $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ en des points A_0 et A_1 de telle sorte que I est le milieu du segment $[A_0, A_1]$. Montrer que $\mathcal{D}''$ a pour équation $f_0 - k f_1$. En déduire l'existence et l'unicité de $\mathcal{D}''$.
5. Supposons que $\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ en des points M_0 et M_1 respectivement. Soit $M \in \mathcal{D}$ distinct de M_0 et M_1. Montrer qu'on a la relation

$$\frac{\overline{MM_0}}{\overline{MM_1}} = -\frac{f_0(M) f_1(M_0)}{f_1(M) f_0(M_1)}.$$

6. Supposons que $\mathcal{D}$ ne passe pas par P et est sécante à $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ en M_0, M_1, U' et U'' respectivement. Montrer qu'on a la relation

$$\frac{\overline{U'M_0}}{\overline{U'M_0}} = -\frac{\overline{U''M_0}}{\overline{U''M_0}}.$$