Université Paris 7-Denis Diderot
M1 mathématiques

Algèbre
Année 2006-07
F. Conduché - L. Merel

EXAMEN PARTIEL du 14 novembre 2006

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document autre que le polycopié est interdit.

Posons $A = \{a + bi\sqrt{5} \in \mathbf{C}/a, b \in \mathbf{Z}\}$ et $K = \{a + bi\sqrt{5} \in \mathbf{C}/a, b \in \mathbf{Q}\}$.

I

1. Démontrer que A est un anneau.
2. Considérons l'application $N : A \to A$ qui à z associe $z\bar{z}$. Démontrer que $N(zz') = N(z)N(z')$ et que N est à valeurs dans $\mathbf{Z}$.
3. Déterminer le groupe A^* des éléments inversibles de A.
4. Démontrer que les éléments suivants 2, 3, $1 + i\sqrt{5}$, $1 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A.
5. L'anneau A est-il factoriel ?
6. Démontrer que l'application $\mathbf{Z}[X] \to A$ qui à P associe $P(i\sqrt{5})$ est un homomorphisme d'anneaux de noyau l'idéal engendré par $X^2 + 5$. En déduire que A est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 5)$.

II

Notons I_2 l'idéal de A engendré par 2 et $1 + i\sqrt{5}$. Notons I_3 l'idéal de A engendré par 3 et $1 - i\sqrt{5}$.
1. Démontrer que les éléments de I_2 (resp. I_3) sont de la forme $a + bi\sqrt{5}$ avec $a \equiv b \pmod 2$ (resp. $a \equiv -b \pmod 3$). En déduire que ces idéaux sont distincts de A.
2. Montrer que les idéaux I_2 et I_3 ne sont pas principaux.
3. Démontrer que I_2I_3 est engendré par 6, $2 - 2i\sqrt{5}$ et $3 + 3i\sqrt{5}$. Montrer que ces éléments sont divisibles par $1 - i\sqrt{5}$. En déduire que I_2I_3 est engendré par $1 - i\sqrt{5}$.
4. Montrer que I_2 et I_3 sont premiers entre eux. En déduire que $I_2 \cap I_3$ est principal.
5. Soient I un idéal de A et $a \in A$ un élément non nul. Démonter que I est principal si et seulement si aI est principal.
6. Soit J un idéal non principal de A. Démontrer que $I_2J \cap I_3J = I_2I_3J$. En déduire que $I_2J \cap I_3J$ n'est pas principal.
7. Donner un exemple d'idéaux principaux dont l'intersection n'est pas principale.

III

1. Démontrer que K est un corps isomorphe au corps des fractions de A et que c'est un A-module.
2. Soient M_1 et M_2 deux sous-A-modules de type fini de K. Notons M_1M_2 le sous-module de K engendré par $\{m_1m_2/m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$. Démontrer que si $(x_1, .., x_n)$ et $(y_1, ..., y_m)$ sont des systèmes de générateurs de M_1 et M_2 respectivement, $(x_iy_j)_{i\in\{1,...,n\}, j\in\{1,...,m\}}$ est un système de générateurs de M_1M_2. En déduire que M_1M_2 est un A-module de type fini.
3. Soit $a \in K$. Démontrer que $aA = \{ab \in K/b \in A\}$ est un sous-A-module de type fini de K. Un tel A-module est dit *principal*. Démontrer que si M_1 et M_2 sont des sous-A-modules principaux de K, il en est de même de M_1M_2.
4. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-modules principaux non nuls de K. Montrer que la loi interne qui à (M_1, M_2) associe M_1M_2 fait de $\mathcal{P}$ un groupe abélien.
5. Soit M un sous-A-module non nul et de type fini de K. Posons $M^{-1} = \{x \in K/xM \subset A\}$. Démontrer que M^{-1} est un sous-A-module de type fini de K. (On pourra montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $M^{-1} \subset aA$.) Montrer que $MM^{-1} = A$.
6. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-A-modules non nuls de type fini de K. Démontrer que la loi interne qui à (M_1, M_2) associe M_1M_2 fait de $\mathcal{I}$ un groupe abélien qui admet $\mathcal{P}$ comme sous-groupe.