Université Paris Diderot | Algèbre
Master de Mathématiques | Année 2017-18
L. Merel, J.-F. Mestre

CONTRÔLE du 13 octobre 2017

Durée : 1h30

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

On admettra que 2017 est un nombre premier.
1. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2017\mathbf{Z}$.
2. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbf{Z}$-module $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/2017\mathbf{Z})^*$.
3. Donner son ordre.
4. Donner son exposant.
5. Déterminer le produit tensoriel $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2017\mathbf{Z}$.
6. Déterminer le produit tensoriel $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^* \otimes (\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^* \otimes (\mathbf{Z}/2017\mathbf{Z})^*$.

II

Considérons les matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Déterminer les facteurs invariants dans $\mathbf{R}[X]$ de $A - X\mathrm{Id}$.
8. Déterminer les facteurs invariants dans $\mathbf{R}[X]$ de $B - X\mathrm{Id}$.
9. Les matrices A et B sont-elles semblables dans $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$?
10. Les matrices B et C sont-elles semblables dans $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$?

III

Soit $A = \{P \in \mathbf{Q}[X] / P(0) \in \mathbf{Z}\}$.
11. Montrer que A est un anneau.
12. Est-il intègre ?
13. Montrer que $\mathbf{Q}[X]$ est un A-module (pour la multiplication des polynômes).
14. Soit M un sous-A-module de type fini de $\mathbf{Q}[X]$. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que M est contenu dans $\frac{1}{n}A$.
15. Le A-module $\mathbf{Q}[X]$ est-il noethérien ?
16. Montrer que $I = \{P \in A / P(0) = 0\}$ est un idéal de A.
17. L'idéal I est-il principal dans A ?
18. Est-il de type fini ?
19. Soient P_1, $P_2 \in A$. Posons $d = \mathrm{pgcd}(P_1(0), P_2(0))$. Soit P un pgcd de P_1 et P_2 dans $\mathbf{Q}[X]$ tel que $P(0) = d$. Montrer qu'il existe Q_1, $Q_2 \in A$ tels que $P = P_1Q_1 + P_2Q_2$.
20. En déduire que tout idéal de type fini de A est principal.
Remarque : Un anneau dans lequel tout idéal de type fini est principal est dit de *Bézout*.