Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Géométrie affine et euclidienne
Année 2010-11
F. Liret, L. Merel

EXAMEN du 13 janvier 2011

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Soit ABC un triangle équilatéral de $\mathcal{P}$ de coté de longueur 1. Soient $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ les cercles de centres A et B respectivement passant par C. Soit Γ un cercle vérifiant les conditions suivantes (qui expriment que Γ est tangent à $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et (AB)).

(i) Le cercle Γ rencontrent $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ en des points uniques A' et B' respectivement, de telle sorte que la tangente à $\mathcal{C}_A$ (resp. $\mathcal{C}_B$) en A' (resp. B') à coïncident avec la tangente à Γ en A' (resp. B')

(ii) Le cercle Γ est tangent à la droite (AB) en le milieu D du segment $[A, B]$.

On se propose de déterminer le rayon r de Γ

1. Faire une figure.
2. Montrer que le centre O de Γ est sur la droite (AA').
3. Montrer que $OA = 1 - r$.
4. Établir une relation entre OD, OA et AD.
5. En déduire r.

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3. On appelle *retournement* de $\mathcal{E}$ une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine de $\mathcal{E}$.

1. Montrer qu'un retournement, donné comme la symétrie orthogonale ρ par rapport à une droite $\mathcal{D}$, est une rotation de $\mathcal{E}$. Donner l'ensemble des points fixes, l'axe et la mesure de ρ.

2. Soient ρ_1 et ρ_2 deux retournements de $\mathcal{E}$ d'axes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ est un déplacement de $\mathcal{E}$.

3. Supposons que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point O. Notons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans orthogonaux à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement passant par O.
3.a. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ admet au moins un point fixe.
3.b. Montrer que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite passant par O.
3.c. Montrer que tout point de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est fixe par $\rho_1 \circ \rho_2$.
3.d. En déduire que $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation, dont on précisera l'axe.

4. Supposons que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles et distinctes.
4.a. Montrer que ρ_1 et ρ_2 ont même application linéaire associée.
4.b. En déduire que $\rho_1 \circ \rho_2$ est une translation.
4.c. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ est une translation de vecteur $2u$, où u est un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
4.d. Quelle est la droite translatée de $\mathcal{D}_2$ par u ?

5. Supposons $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non coplanaires.
5.a. Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et sécante à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ en des points Q_1 et Q_2 respectivement.
5.b. Montrer que l'application linéaire associée à $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation vectorielle, d'axe la direction de $\mathcal{D}$.
5.c. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2(Q_2)$ appartient à $\mathcal{D}$.
5.d. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ est un vissage d'axe $\mathcal{D}$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé (O, e_1, e_2). Considérons la conique d'équation $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 10x - 4y = 0$ dans ce repère.
1. Montrer qu'il s'agit d'une ellipse.
2. Déterminer le centre et les axes de cette ellipse.
3. Déterminer les foyers et l'excentricité de l'ellipse.
4. Faire un figure représentant l'ellipse, le centre, les axes, les foyers.