Université Paris 7-Denis Diderot
M1 mathématiques

Algèbre – Année 2006-07
L. Merel

EXAMEN du 11 juin 2007

Durée : 3 h

I

Soit K un corps commutatif. Soit I un idéal maximal de $K[X]$.
1. Donner un exemple de tel idéal I. À quelle condition un tel idéal est-il premier ?
2. Considérons $K[X]_{(I)} = \{P/Q \in K(X)/P, Q \in K[X], Q \notin I\}$. Montrer que $K[X]_{(I)}$ est un anneau.
3. Montrer que $K[X]_{(I)}$ est un anneau intègre.
4. Quels sont les éléments inversibles de $K[X]_{(I)}$?
5. Le groupe $K[X]^*_{(I)}$ est-il fini ?
6. Montrer que $K[X]_{(I)}$ s'identifie au localisé en I de $K[X]$.
7. Montrer que I engendre un idéal maximal de $K[X]_{(I)}$, puis que tout idéal de $K[X]_{(I)}$ est une puissance de I.

II

Considérons les groupes abéliens suivants : $\mathbf{R}$, $\{e^{2i\pi z} \in \mathbf{C}/z \in \mathbf{Q}\}$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{Z}/2007\mathbf{Z}$.
1. Déterminer leurs parties de torsion.
2. Dire lesquels parmi eux sont de type fini.
3. Dire lesquels parmi eux possèdent un sous-groupe de type fini libre de rang non nul.
4. Y a-t-il deux groupes abéliens d'ordre 2007 qui ne sont pas isomorphes ?

III

Considérons les polynômes $Q(X) = X^3 + 4X - 1$ et $P(X) = X^4 - X - 1$ dans $\mathbf{Q}[X]$. Soit K un corps de décomposition dans $\mathbf{C}$ de P.

1. Montrer que la réduction modulo 2 de P est irréductible sur un corps à deux éléments $\mathbf{F}_2$. En déduire que P et Q sont irréductibles sur $\mathbf{Q}$.
2. Combien P et Q ont-ils de racines réelles ? Combien le polynôme $Q(X^2)$ a-t-il de racines réelles ? Soit β une racine réelle de P. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(\beta)|\mathbf{Q}$? En déduire que 4 divise $[K \cap \mathbf{R} : \mathbf{Q}]$.
3. Soit α une racine réelle de $Q(X^2)$. Montrer que

$$P = (X^2 + \alpha^2/2)^2 - (\alpha X + 1/(2\alpha))^2.$$

4. Montrer que α^2 est un nombre algébrique de degré 3 sur $\mathbf{Q}$. Montrer que $\mathbf{Q}(\alpha^2) \subset K$. En déduire que 3 divise $[K \cap \mathbf{R} : \mathbf{Q}]$.
5. Montrer que le groupe de Galois de l'extension $K|\mathbf{Q}$ s'identifie à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$. En déduire que l'extension $K|\mathbf{Q}$ est de degré divisant 24.
6. Montrer que K n'est pas contenu dans $\mathbf{R}$. En déduire que $[K : K \cap \mathbf{R}] = 2$.
7. Quel est le degré de l'extension $K|\mathbf{Q}$? À quoi s'identifie le groupe de Galois de cette extension ?
8. Montrer que K est engendré par i et une racine carrée de α.