Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Algèbre
Année 2017-18

L. Merel, J.-F. Mestre

CONTRÔLE du 10 novembre 2017

Durée : 2h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Soit j une racine 3-ème primitive de l'unité dans $\mathbf{C}$. Posons $\mathbf{Z}[j] = \{a + bj/a, b \in \mathbf{Z}\}$ et $\mathbf{Q}(j) = \{a + bj/a, b \in \mathbf{Q}\}$. Pour $a, b \in \mathbf{R}$, posons $\mathrm{N}(a + bj) = (a + bj)(a + bj^2)$.

1. Écrire le 3-ème polynôme cyclotomique Φ_3.
2. Montrer que $\mathbf{Z}[j]$ est un anneau.
3. Montrer que, pour $z, z' \in \mathbf{Z}[j]$, on a $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)N(z')$.
4. Montrer que si z est inversible dans $\mathbf{Z}[j]$, on a $\mathrm{N}(z) = 1$.
5. En déduire que les inversibles de $\mathbf{Z}[j]$ sont 1, -1, j, $-j$, j^2 et $-j^2$.
6. Montrer que tout nombre complexe s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathbf{Z}[j]$ et d'un nombre complexe z tel que $\mathrm{N}(z) < 1$.
7. Soit $z \in \mathbf{Z}[j]$ et $d \in \mathbf{Z}[j]$, $d \neq 0$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbf{Z}[j]$ et $r \in \mathbf{Z}[j]$ tels que $z = dq + r$ avec $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(d)$.
8. En déduire que $\mathbf{Z}[j]$ est un anneau euclidien.
9. L'anneau $\mathbf{Z}[j][X]$ est-il factoriel ?

II

Pour n entier ≥ 3, posons $P_n = X^n + (1 - j)X + 3 \in \mathbf{Z}[j][X]$.

10. Calculer le discriminant de P_3.
11. Soient α, β, γ les racines de P_3 dans $\mathbf{C}$. Calculer $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma$.
12. Calculer $((\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma))^2$.
13. Montrer que $1 - j$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[j]$.
14. Montrer que P_3 a des racines multiples dans le corps $\mathbf{Z}[j]/(1 - j)$.
15. L'élément 2 est-il premier dans $\mathbf{Z}[j]$?
16. Montrer que $k = \mathbf{Z}[j]/(2)$ est un corps à 4 éléments formé des classes de 0, 1, j, j^2.

III

17. Soit A un anneau factoriel. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$. Soit $p \in A$ un élément irréductible. Supposons que $a_n = 1$, que $p|a_k$ pour $0 \leq k \leq n - 1$. Montrer que si p^2 ne divise pas a_1, P est irréductible dans $A[X]$ ou possède une racine dans A.
18. Pour n entier non congru à 1 modulo 3, montrer que P_n est sans racine dans k.
19. Lorsque n est ≥ 4, montrer que le polynôme P_n est sans racine dans $\mathbf{Z}[j]$.
20. En déduire que P_n est irréductible sur $\mathbf{Z}[j]$ pour tout $n \geq 3$.