Université Paris 7-Denis Diderot
M1 mathématiques

Algèbre
Année 2006-07
F. Conduché - L. Merel

EXAMEN du 10 janvier 2007

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document autre que le polycopié ou les notes de cours est interdit.

Soient a et b des entiers. Considérons le polynôme $P(X) = X^4 + aX^2 + b \in \mathbf{Z}[X]$.

I

1. Donner des exemples de valeurs de a et b telles que P ait 4 (resp. 2, resp. 0) racines réelles.
2. Soit p un nombre premier. Soit q une puissance de p. Montrer que la réduction $\tilde{P}$ modulo p de P admet une racine α dans un corps à q éléments si et seulement si les polynômes $\tilde{P}$, $X^q - X \in \mathbf{F}_p[X]$ ont un facteur commun.
3. À quelle condition sur a et b, la réduction modulo 2 (resp. modulo 3) de P est-elle irréductible sur $\mathbf{F}_2$ (resp. sur $\mathbf{F}_3$) ?
4. Donner des exemples de valeurs de a et b telles que P soit irréductible sur $\mathbf{Q}$ et possède exactement deux racines réelles.
5. Calculer le discriminant de P. En déduire pour quelle valeurs de a et b, P admet une racine multiple.

II

Notons L le corps de décomposition dans $\mathbf{C}$ de P.

1. Soit $\alpha \in L$ une racine de P. Démontrer que toute racine de P est dans une extension quadratique d'une extension quadratique de $\mathbf{Q}$. En déduire que l'extension $\mathbf{Q}(\alpha)|\mathbf{Q}$ est de degré 1, 2 ou 4.
2. Montrer que $L = \mathbf{Q}(\alpha, \beta)$, où α et β sont des racines de P bien choisies. Montrer que de plus l'extension $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)|\mathbf{Q}(\alpha)$ est alors de degré 1 ou 2.
3. Montrer que l'extension $L|\mathbf{Q}$ est de degré divisant 8.
4. Le corps L contient-il une extension de degré 3 sur $\mathbf{Q}$?
5. Donner des exemples de valeurs de a et b pour lesquelles $L|\mathbf{Q}$ est de degré 8.
6. Montrer que l'extension $L|\mathbf{Q}$ est galoisienne.

III

Notons G le groupe de Galois de l'extension $L|\mathbf{Q}$.

1. Montrer que G s'identifie à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.
2. Montrer que G est un 2-groupe.
3. Soit G_2 un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{S}_4$. Quel est son ordre ? Est-il abélien ? Choisir G_2 en donnant la liste de ses éléments.
4. Donner des exemples de valeurs de a et b pour lesquelles G est isomorphe à G_2.
5. Y a-t-il des exemples de valeurs de a et b pour lesquelles G est cyclique d'ordre 8, produit d'un groupe cyclique d'ordre 4 et d'un groupe d'ordre 2, produit de deux groupes cycliques d'ordre 2 ?
6. Donner la liste des sous-groupes de G_2.
7. Supposons que G soit isomorphe à G_2. Combien L a-t-il de sous-corps de degrés 1, 2, 4 et 8 respectivement sur $\mathbf{Q}$?
8. Posons $P = X^4 - 5$. Donner la liste des sous-corps de L en indiquant des générateurs de ces corps sur $\mathbf{Q}$.