Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Algèbre
Année 2017-18
L. Merel, J.-F. Mestre

CONTRÔLE du 8 décembre 2017

Durée : 2h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Soit $P(X) = X^4 + 4X^2 + 2 \in \mathbf{Q}[X]$. Soit K un corps de décomposition de P dans $\mathbf{C}$.
1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
2. Démontrer que l'ensemble des racines de P dans $\mathbf{C}$ est de la forme $S = \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$, avec α, $\beta \notin \mathbf{R}$.
3. Démontrer que $\alpha^2\beta^2 = 2$.
4. Démontrer que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
5. Démontrer que $\beta \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
6. Quel est le degré de l'extension $K|\mathbf{Q}$?
7. Montrer que l'extension $K|\mathbf{Q}$ est galoisienne.
8. Quel est l'ordre de $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$?
9. L'extension $K|\mathbf{Q}$ est-elle résoluble par radicaux ?
10. Montrer que l'application $G \to S$ qui à σ associe $\sigma(\alpha)$ est injective.
11. Démontrer que la conjugaison complexe induit un élément c de G d'ordre 2. Posons $H = \{1, c\}$.
12. Quel est le sous-corps $K^H = \{x \in K/h(x) = x\,(h \in H)\}$?
13. Soit $\sigma \in G$ distinct de l'identité et de c. Démontrer que $\sigma(\alpha\beta) = -\alpha\beta$.
14. En déduire que σ est d'ordre 4.
15. Démontrer que K admet un unique sous-corps de degré 2 sur $\mathbf{Q}$.
16. Donner la partie réelle et la partie imaginaire d'une racine ζ primitive 8-ème de l'unité dans $\mathbf{C}$.
17. Montrer que $\sqrt{2}$ est contenu dans le 8-ème corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta)$.
18. Notons G_8 le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$. Montrer qu'il est isomorphe au produit de deux groupes cycliques d'ordre 2.
19. Montrer que K n'est pas $\mathbf{Q}(\zeta)$.
20. Montrer que K est contenu dans le 16-ème corps cyclotomique.