Université Paris 7-Denis Diderot
M1 mathématiques

Algèbre – Année 2005-06
F. Conduché - M. Couillens - L. Merel

EXAMEN du 6 juin 2006

Durée : 3 h

1. Considérons les groupes abéliens suivants : $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $\mathbf{C}^*$, $\{z \in \mathbf{C}^*/z^{2006} = 1\}$.
1.a. Déterminer leurs parties de torsion.
1.b. Dire lesquels parmi eux sont de type fini.
1.c. Dire lesquels parmi eux possède un sous-groupe de type fini libre de rang non nul.

2. Y a-t-il deux groupes abéliens d'ordre 2006 qui ne sont pas isomorphes ?

3. L'anneau $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ est-il principal ?

4. Soit K un corps.
4.a. Les anneaux $K(X)[Y]$ et $K(X)[Y, Z]$ sont-ils principaux ?
4.b. Sont-ils factoriels ?

5. Posons $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbf{Z}[X]$.
5.a. Calculer $P(Y + 1)$.
5.b. En déduire que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
5.c. Est-il irréductible sur $\mathbf{R}$?
5.d. La réduction modulo 5 de P est-elle irréductible sur $\mathbf{F}_5$?
5.e. La réduction modulo 2 de P est-elle irréductible sur $\mathbf{F}_2$?

6. Soit K le corps de décomposition dans $\mathbf{C}$ du polynôme $X^4 - 4$.
6.a. Décomposer le polynôme $X^4 - 4$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{Q}$.
6.b. Démontrer que K possède deux sous-corps distincts K_1 et K_2 qui sont des extensions quadratiques de $\mathbf{Q}$.
6.c. Donner deux polynômes P_1 et P_2 dont K_1 et K_2 sont des corps de rupture sur $\mathbf{Q}$.
6.d. Démontrer que $K = K_1K_2$.
6.e. Quel est le degré de l'extension $K|\mathbf{Q}$?
6.f. Les extensions $K_1|\mathbf{Q}$ et $K_2|\mathbf{Q}$ sont-elles galoisiennes ?
6.g. Le groupe de Galois de l'extension $K|\mathbf{Q}$ est-il abélien ?
6.h. Démontrer que $\sqrt{2}(1 + i)$ appartient à K.
6.i. Déterminer un élément primitif de l'extension $K|\mathbf{Q}$.