Université Paris 7-Denis Diderot
Licence d'enseignement

Géométrie
Année 2001-02

C. Leruste, L. Merel

EXAMEN du 6 juin 2002

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Observons un ballon de football, d'un point de vue mathématique. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soit $\mathcal{S}$ une sphère de $\mathcal{E}$ de centre O et de rayon R. Soit F un ensemble de soixante points sur $\mathcal{S}$. On appelle *isométrie de* F une isométrie de $\mathcal{E}$ qui laisse stable l'ensemble F. On note d la distance minimale entre deux points distincts de F. L'observation du ballon se traduit par les hypothèses suivantes.

H1. Pour tout $(P_1, P_2) \in F^2$, il existe une isométrie f de F telle que $f(P_1) = P_2$ (on le constate en manipulant le ballon).
H2. Pour tout point P de F, il y a exactement trois points P', Q, $R \in F$ à distance d de P ; ces points sont tels que les triplets (resp. le triplet) (P', P, Q) et (P', P, R) (resp. (Q, P, R)) soient trois sommets consécutifs d'un hexagone (resp. pentagone) régulier de coté d et à sommets dans F. On appelle *faces hexagonales* et *faces pentagonales* de F de tels polygones. On appelle *arête* les segments $[P, P']$, $[P, Q]$ et $[P, R]$.
H3. Dans les conditions de l'hypothèse **H2**, la symétrie orthogonale $s_{\{P,P'\}}$ par rapport au plan (OPP') et la symétrie centrale s_O par rapport à O sont des isométries de F.

1.a Démontrer que l'ensemble des isométries de F est un groupe noté $\mathrm{Isom}(F)$.

1.b. Soit $P_0 \in F$. Démontrer que l'application $\phi : \mathrm{Isom}(F) \to F$ qui à f associe $f(P_0)$ est surjective.

1.c. En déduire que l'ordre de $\mathrm{Isom}(F)$ est 60 multiplié par le nombre d'isométries f de F telles que $f(P_0) = P_0$.

2. Combien y a-t-il de faces hexagonales et de faces pentagonales de F ?

3. Démontrer que O est le barycentre des points de F.

4. Soit f un déplacement de F.

4.a. Démontrer que $f(O) = O$.

4.b. En déduire que f est une rotation ou l'identité.

5. Soit f une isométrie de F et P un point de F tels que $f(P) = P$. On considère les points P', Q, $R \in F$ comme ci-dessus.

5.a Montrer que f laisse stable l'ensemble $\{P', Q, R\}$.

5.b. En déduire que f est l'identité ou $f = s_{\{P,P'\}}$.

6.a. Combien y a-t-il d'isométries de F ?

6.b. Combien y a-t-il de déplacements parmi ces isométries ?

7. Soit f une rotation de F.

7.a Si f laisse stable l'ensemble des sommets d'une face hexagonale (resp. face pentagonale) de F de barycentre C, démontrer que l'axe de f est la droite (O, C).

7.b. Si f laisse stable les deux extrémités d'une arête, quel est l'axe de f ? Quelle est sa mesure ?

7.c Indiquer sans démonstration quels sont les déplacements de F.

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction P. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathcal{P}$ de centre O. Soient deux points A et B de $\mathcal{C}$, distincts et non diamétralement opposés. Posons $\mathcal{D} = (AB)$. Notons $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par O et les points U et V d'intersection de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$. Considérons le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$; notons O' le centre de $\mathcal{C}'$.

1.a. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in P$ tel que $\mathcal{C}'$ soit l'image de $\mathcal{C}$ par la translation $t_{\overrightarrow{u}}$.

1.b. Posons $E = t_{(-\overrightarrow{u})}(A)$ et $F = t_{(-\overrightarrow{u})}(B)$. Montrer que E et F sont des points de $\mathcal{C}$. Que peut-on dire du quadrilatère $ABFE$?

2. Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A, B, E, F. On pose $N = t_{\overrightarrow{u}}(M)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est la hauteur du triangle AMN issue de A.

3. On note Q le symétrique orthogonal de N par rapport à $\mathcal{D}$.

3.a. Montrer que N est un point de $\mathcal{C}'$ et que Q est un point de $\mathcal{C}$.

3.b. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $Q = M$;
(ii) le quadrilatère $OO'NM$ est un rectangle ;
(iii) $M = U$ ou $M = V$.

4.a. Comparer les angles de vecteurs $\widehat{QAB}$ et $\widehat{BAN}$.

4.b. Comparer les angles de droites $A\widehat{Q, A}B$ et $M\widehat{Q, M}B$ lorsque $Q \neq M$.

4.c. Montrer que l'égalité d'angles de droites $A\widehat{B, A}N = M\widehat{N, M}B$ a lieu dans tous les cas (que l'on ait $Q = M$ ou $Q \neq M$).

5.a Montrer que les droites (AN) et (BM) sont perpendiculaires.

5.b Montrer que les droites (AM) et (BN) sont perpendiculaires.

6. Que se passe-t-il si $M \in \{A, B, E, F\}$?