Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Algèbre
Année 2018-19

L. Merel, J.-F. Mestre

CONTRÔLE du 4 décembre 2018

Durée : 2h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

Considérons les nombres réels positifs suivants : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ et $\sqrt[3]{2-\sqrt{2}}$. Considérons la racine cubique primitive de l'unité j dans $\mathbf{C}$. Posons

$$t = \sqrt[3]{2+\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad s = \sqrt[3]{2-\sqrt{2}}$$

I

1. Montrer que $Q(T) = T^6 - 4T^3 + 2 \in \mathbf{Q}[T]$ est le polynôme minimal de t sur $\mathbf{Q}$.
2. Déterminer les conjugués de t dans $\mathbf{C}$.
3. Montrer que le corps de décomposition de Q dans $\mathbf{C}$ est $\mathbf{Q}(j,t,s)$.
4. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(t)|\mathbf{Q}$? Cette extension est-elle galoisienne ?
5. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(j,t)|\mathbf{Q}$?
6. Montrer que $\mathbf{Q}(j,t,s) = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, j, t)$.
7. En déduire que $\mathbf{Q}(j,t,s)|\mathbf{Q}$ est de degré ≤ 36.

II

8. Soit x une racine de $R(X) = (X^3-4)^3 - 54X^3 \in \mathbf{Q}[X]$. Montrer que $R(s+t) = 0$.
9. Montrer que $z = (x^2 - 4/x)/3$ et $y = (x^3-4)/3$ vérifient $z^3 - 2 = 0$ et $y^3 - 6y - 8 = 0$.
10. Calculer les discriminants des polynômes $Z^3 - 2$ et $Y^3 - 6Y - 8$.
11. Montrer que les corps de décompositions des polynômes $Z^3 - 2$ et $Y^3 - 6Y - 8$ contiennent des corps quadratiques distincts. En déduire que $\mathbf{Q}(y) \neq \mathbf{Q}(z)$.
12. En déduire que $\mathbf{Q}(x)$ n'est pas de degré 3.
13. Montrer que les facteurs irréductibles de R sont de degré 3, 6 ou 9.
14. En déduire que R est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et le degré de l'extension $\mathbf{Q}(x)|\mathbf{Q}$.
15. En déduire que $\mathbf{Q}(j,t,s)|\mathbf{Q}$ est de degré 36. On suppose désormais que $x = s+t$.

III

16. Placer les corps $\mathbf{Q}(j,t,s)$, $\mathbf{Q}(j,\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-6},y)$, $\mathbf{Q}(j,z)$, $\mathbf{Q}(x)$, $\mathbf{Q}(y)$, $\mathbf{Q}(z)$, $\mathbf{Q}(j)$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$, $\mathbf{Q}$ dans un diagramme, où on indiquera les degrés des extensions.
17. Quel est l'ordre du groupe de Galois G du polynôme Q ?
18. Montrer que G n'est pas abélien.
19. Les groupes $\mathcal{S}_6$ (groupe symétrique) et G admettent-ils un élément d'ordre 9 ?
20. Montrer que G admet un unique sous-groupe H d'ordre 9.
21. Quel est le corps formé par les invariants sous H ?