Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Fonctions analytiques
Année 2011-12

L. Merel

EXAMEN du 1er juin 2012

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

On désigne par $\Re(z)$ et $\Im(z)$ les parties réelles et imaginaires respectivement d'un nombre complexe z. On note $\mathcal{C}(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$ et $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$. On note cos et sin les fonctions cosinus et sinus respectivement.

Exercice 1

Posons $j = e^{2i\pi/3}$.
1. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $z \mapsto 1/(z+j)$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $z \mapsto 1/(1-z+z^2)$.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de la fonction $z \mapsto 1/(1-z+z^2)$. Quel est le rayon de convergence de cette série ?
4. Déterminer les pôles et les résidus de la fonction $z \mapsto 1/(1-z+z^2)$.
5. Calculer $\int_{\mathcal{C}(1,2)} dz/(1-z+z^2)$.
6. Calculer l'intégrale réelle $\int_{-\infty}^{+\infty} dx/(1-x+x^2)$.

Exercice 2

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq |\cos(z)|$ ($z \in \mathbf{C}$).
1. Quel est l'ensemble X constitué par les zéros de $z \mapsto \cos(z)$?
2. Montrer que la fonction $z \mapsto f(z)/\cos(z)$, définie en dehors de X, se prolonge en une fonction entière.
3. En déduire que f et cos sont proportionnelles (*i.e.* leur rapport est constant).
4. Existe-t-il une fonction entière g non proportionnelle à cos telle que $|g(z)| \leq |\cos(z)|$ ($z \in \mathbf{C}$, $\Re(z) > 0$) ?

Exercice 3

Considérons la fonction de la variable complexe z donnée par $f(z) = \sin(z)/(e^z - 1)$.
1. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Comment se comporte-t-elle en 0 ?
2. Quels sont ses zéros et ses pôles ? Faire un dessin.
3. Donner le développement à l'ordre 2 de f en 0.
4. Quel est le rayon de convergence du développement en série entière de f en 0 ?
5. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,5)} (f'(z)/f(z))\, dz$.

Exercice 4

Pour n entier ≥ 1 et $z \in \mathbf{C}$ posons $g_n(z) = n^{-z} z(z+1)...(z+n)/n!$, où $n^{-z} = e^{-\log(n)z}$. Posons $f_n(z) = g_{n+1}(z)/g_n(z)$.
1. Soit G une fonction entière telle que $G(1) = 1$ et $G(z+1) = G(z)/z$ ($z \in \mathbf{C}$). Montrer que G admet des zéros simple en tous les entiers ≤ 0.
2. Montrer que la fonction f_n est entière et que la série $\sum_n |f_n(z) - 1|$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$.
3. En déduire que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge vers une fonction entière g.
4. Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $g_n(z)/g_n(z+1) \to z$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire qu'on a $g(z+1) = g(z)/z$.
5. Quels sont les zéros de g ?