Université Paris 7-Denis Diderot
M1 mathématiques

Devoir à rendre le 9 novembre 2007

Soient K un corps, E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On s'intéresse à déterminer $S = \{v \in \mathrm{End}(E)/vu - uv = 1\}$, en étudiant E comme $K[X]$-module.

On note 1 l'élément identité de $\mathrm{End}(E)$, u_1u_2 la composée de deux endomorphismes u_1 et u_2, vx l'image par un endomorphisme v d'un élément x de E et on pose, dans la K-algèbre $\mathrm{End}(E)$, $P(v) = a_0 1 + a_1 v + ... + a_n v^n$ (où $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in K[X]$).

Soit A un anneau intègre. Soit M un A-module. Soient $a \in A$, $a \neq 0$ et $m \in M$. On dit que m est de *a-torsion* si $a.m = 0$ et que m est *divisible par a* s'il existe $n \in M$ tel que $m = a.n$. On dit que m est de *torsion* s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$ et m de a-torsion. On dit que m est *divisible* s'il est divisible par tout élément non nul de A.

Rappelons que si A est principal et si M est un A-module de type fini, il existe des entiers r, $s \geq 0$ et des idéaux décroissants I_1, ..., I_s de A tels que M est isomorphe à $A^r \times A/I_1 \times ... \times A/I_s$.

I

1. Montrer que l'application $K[X] \times E \to E$ qui à (P, x) associe $P(u)x$ fait de E un $K[X]$-module.
2. Montrer que l'ensemble T des éléments de torsion et l'ensemble D des éléments divisibles de E sont des sous-$K[X]$-modules de E.
3. Soient $P \in K[X]$ et $x \in E$ de P-torsion. Montrer que x est divisible par tout $Q \in K[X]$ premier à P.
4. Déterminer T et D lorsque E est l'un des $K[X]$-modules suivant : $K[X]$, $K(X)$, $K[X]/(P)$ (où $P \in K[X]$, $P \neq 0$), $K(X)/K[X]$. Dans quels cas a-t-on $T \subset D$?
5. Supposons E de type fini comme $K[X]$-module. Montrer que $D = \{0\}$. (On pourra utiliser que E est isomorphe à $K[X]^r \times K[X]/(P_1) \times ... \times K[X]/(P_s)$ avec r, s entiers ≥ 0 et P_1,...,$P_s \in K[X] - \{0\}$ avec les relations de divisibilité $P_1|P_2...|P_s$.) En déduire que $T \subset D$ si, et seulement si, E est un $K[X]$-module libre.

II

On suppose que le corps K est de caractéristique 0.
1. Montrer que $vP(u) - P(u)v = P'(u)$ ($P \in K[X]$, $v \in S$) (on pourra commencer par $P(X) = X^k$).
2. Supposons $S \neq \emptyset$. Soient $P \in K[X]$ et $x \in E$ de P-torsion. Montrer que x est divisible par P', puis que x est divisible par P, puis que x est divisible. En déduire la relation $T \subset D$.
3. Supposons encore que $S \neq \emptyset$. Si le $K[X]$-module E est de type fini, montrer qu'il est libre. (En particulier, E est un K-espace vectoriel nul ou de dimension infinie ; retrouver ce dernier point en considérant la trace de $uv - vu = 1$.)
4. Si $E = K[X]$, montrer que l'application $P \mapsto P'$ est dans S. En déduire que si E est un $K[X]$-module libre, S est non vide.
5. Si $E = K(X)$, montrer que la dérivation fournit encore un élément de S. Montrer que si $E = K(X)/K[X]$, S est non vide.

III

Supposons que K est de caractéristique non nulle p et que E est de dimension finie d. Notons M le polynôme minimal de u.
1. Montrer que $K[X^p]$ coïncide avec l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de dérivée nulle. Montrer que si $Q \in K[X]$ est de dérivée nulle, l'application $K[X]/(Q) \to K[X]/(Q)$ qui à la classe $\bar{P}$ de P associe la classe de P' est bien définie.
2. Montrer que si $S \neq \emptyset$, on a $p|d$ (on pourra considérer la trace de $uv - vu$).
3. Montrer que si $v \in S$, on a $vP(u) - P(u)v = P'(u)$ ($P \in K[X]$). En déduire que $M' = 0$.
4. En déduire que si $S \neq \emptyset$, il existe un entier $s \geq 0$ et des polynômes non nuls P_1,...,$P_s \in K[X^p] - \{0\}$ tels que E est isomorphe comme $K[X]$-module à $K[X]/(P_1) \times ... \times K[X]/(P_s)$.
5. Réciproquement, si $E = K[X]/(P_1) \times ... \times K[X]/(P_s)$, avec P_1,...,$P_s \in K[X^p]$ des polynômes non nuls vérifiant les relations de divisibilité $P_1|P_2|...|P_s$, montrer que l'application $(\bar{Q}_1, ..., \bar{Q}_s) \mapsto (\bar{Q}'_1, ..., \bar{Q}'_s)$ est dans S.