Université Paris Diderot — Algèbre
Master de Mathématiques — Année 2018-19
L. Merel, J.-F. Mestre

CORRIGÉ du CONTRÔLE du 23 octobre 2018

I

Posons $M = \mathbf{Z}^{2018} \times \mathbf{Z}/2018\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/2018\mathbf{Z})^*$. On précise que le nombre 1009 est premier.

1. Quel est l'ordre de la partie de torsion de M ?

Comme $2018 = 2 \times 1009$, $(\mathbf{Z}/2018\mathbf{Z})^*$ est cyclique d'ordre $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$ et $\mathbf{Z}/2018\mathbf{Z}$ est cyclique d'ordre 2×1009. La partie de torsion est d'ordre 1008×2018.

2. Le groupe M admet-il un sous-groupe fini d'ordre 2019 ?

Non car 2019 est premier à 2018 et à 1008, si bien qu'il ne divise pas 1008×2018.

3. Donner les diviseurs élémentaires et les facteurs invariants de la partie de torsion de M.

Comme cette partie de torsion est isomorphe au produit de deux groupes cycliques d'ordres 2×1009 et $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$ les facteurs invariants sont 2 et $2^4 \times 3^2 \times 7 \times 1009$. Les diviseurs élémentaires sont 2, 2^4, 3^2, 7 et 1009.

4. Soit N un sous-groupe d'indice fini de M. Quel est son rang ?

Ce rang est ≤ 2018. Notons i cet indice et o l'ordre de la partie de torsion de M. Alors N contient ioM, qui est libre de rang 2018. Son rang est donc ≥ 2018. C'est 2018.

5. Quelle est la dimension du $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel $M/2M$?

Le groupe $M/2M$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{2018} \times C/2C \times D/2D$, où C et D sont des groupes cycliques d'ordres pairs. Ainsi chaque facteur du produit est cyclique d'ordre 2. On en déduit que $M/2M$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{2020}$.

II

Soit A un anneau intègre. On dit qu'il est *de Bézout* s'il vérifie la propriété dite de Bézout suivante : pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe $(u, v) \in A^2$ tel que $au + bv$ soit un pgcd de a et b.

6. Montrer que tout anneau principal est de Bézout.

En effet, dans un anneau principal l'idéal $Aa + Ab$ est principal et égal à $A\mathrm{pgcd}(a, b)$.

7. Montrer que, lorsque K est un corps, l'anneau $K[X, Y]$ n'est pas de Bézout.

L'idéal engendré par X et Y n'est pas principal dans cet anneau.

8. Si A est un anneau de Bézout, l'anneau $A[X]$ est-il en général de Bézout ?

Ce n'est pas vrai pour l'anneau principal (et donc de Bézout) $A = K[Y]$, d'après la question précédente.

9. Montrer que tout idéal de type fini de A est principal lorsque A est de Bézout.

C'est une récurrence immédiate sur le nombre de générateur de l'idéal.

10. Montrer que tout anneau noethérien et de Bézout est principal.

Dans un anneau noethérien, tout idéal est de type fini. Par ailleurs, tout idéal de type fini d'un anneau de Bézout est principal. Donc tout idéal est principal dans un tel anneau.

III

Supposons A factoriel et de Bézout. Soit I un idéal de A. Soit $a \in I - \{0\}$ ayant un nombre (compté avec multiplicités) minimal de facteurs irréductibles.

11. Soit $b \in I$. Soit d un pgcd de a et b. Montrer que $d \in I$.

Il existe u, $v \in A$ tels que $d = au + bv$. Comme a et b sont dans I, on a $d \in I$.

12. En déduire que $dA = aA$.

On a $d|a$, comme d n'a pas strictement moins de facteurs irréductibles que a, d et a sont associés et donc $dA = aA$.

13. En déduire que A est principal.

Montrons que I est principal engendré par a. On a $b \in dA = aA$ et donc $I \subset Aa$.

14. Montrer que $B = \{P \in \mathbf{Q}[X]/P(0) \in \mathbf{Z}\}$ est un anneau (il est en fait de Bézout).

On voit immédiatement que c'est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[X]$.

15. L'idéal $I = \{P \in B/P(0) = 0\}$ est-il principal ? Est-il de type fini ?

Il n'est pas de type fini (et donc pas principal). Soit $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de I. Posons $P_i = a_i X + ...$ avec $a_i \in \mathbf{Q}$. Soit $(Q_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de B. Le coefficient de degré 1 de $\sum_{i=1}^n Q_i P_i$ est confiné au sous-groupe de $\mathbf{Q}$ engendré par $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Ce sous-groupe n'est pas $\mathbf{Q}$ car $\mathbf{Q}$ n'est pas de type fini sur $\mathbf{Z}$ et donc pas engendré par $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Ainsi $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ n'engendre pas I.

IV

Supposons A de Bézout. Soit n un entier ≥ 1. Soit M un sous-module de type fini de A^n. Notons $\pi_1 : A^n \to A$ la projection sur la première coordonnée

16. Montrer que pour $n = 1$, M est libre.

Pour $n = 1$, un sous-module de type fini de A^n est un idéal de type fini de A et est donc principal d'après ce qui précède. Or un idéal principal est libre.

17. Posons $I_1 = \pi_1(M)$. Montrer que c'est un idéal de type fini.

Soit $(m_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de générateurs de M. Alors I_1 est engendré par la famille $(\pi_1(m_i))_{1\leq i\leq n}$ puisque π_1 est A-linéaire.

18. Montrer qu'il existe $x \in M$ tel que $I_1 = A\pi_1(x)$.

Comme I_1 est de type fini, il est principal, engendré par, disons, y. Soit $x \in M$ tel que $y = \pi_1(x)$. Cet élément convient.

19. Posons $M_1 = \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap M$. Montrer que si I_1 est non nul, on a $Ax \oplus M_1 = M$.

Comme A est intègre et que $\pi_1(x) \neq 0$, on a $Ax \cap M_1 = \{0\}$. Soit $m \in M$. Posons $\pi_1(m) = t\pi_1(x)$ avec $t \in A$. On a $m = tx + (m - tx)$ avec $tx \in Ax$ et $m - tx \in M$. D'où la somme directe.

20. Montrer que M_1 est isomorphe à un sous-module de A^{n-1}.

C'est l'image de M_1 par l'application linéaire injective $\mathrm{Ker}(\pi_1) \to A^{n-1}$ donnée par la projection sur les $n-1$ dernières coordonnées.

21. Montrer par récurrence sur n que M est libre.

C'est démontré pour $n = 1$. Supposons-le démontré pour les sous-modules de type fini de A^{n-1}, avec $n \geq 2$. Si l'idéal I_1 est nul, M est isomorphe à un sous-module de A^{n-1} par oubli de la première coordonnée. Il est donc de type fini.

Si I_1 est non nul, on utilise les deux questions précédentes. Le module M_1 est de type fini puisque c'est l'image de M par la surjection linéaire issue de la somme directe $Ax \oplus M_1 = M$. Comme il est isomorphe à un sous-module de A^{n-1} il est libre.

Ainsi M est somme directe de deux modules libres. Il est donc libre.