Université Paris Diderot — Algèbre
Master de Mathématiques — Année 2017-18
L. Merel, J.-F. Mestre

CORRIGÉ du CONTRÔLE du 13 octobre 2017

I

On admettra que 2017 est un nombre premier.

1. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2017\mathbf{Z}$.

Les nombres 13, 10 et 2017 sont premiers entre eux deux à deux, si bien que $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2017\mathbf{Z}$ est cyclique d'ordre $13 \times 10 \times 17$, qui est le seul facteur invariant.

2. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbf{Z}$-module $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/2017\mathbf{Z})^*$.

Comme 13 est premier, $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^*$ est cyclique d'ordre 12. Comme $10 = 2 \times 5$, $(\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^*$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^*$. Or $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^*$ est trivial et $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^*$ est cyclique d'ordre 4. Donc $(\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^*$ est cyclique d'ordre 4. Comme 2017 est premier, $(\mathbf{Z}/2017\mathbf{Z})^*$ est cyclique d'ordre 2016. Or on a $4|12$ et $12|2016$. Ainsi, les facteurs invariants sont 4, 12, 2016.

3. Donner son ordre.

L'ordre du groupe est le produit $4 \times 12 \times 2016$ des facteurs invariants.

4. Donner son exposant.

L'exposant d'un groupe est le dernier facteur invariant, c'est-à-dire 2016.

5. Déterminer le produit tensoriel $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2017\mathbf{Z}$.

On utilise que, pour n et m entiers, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/\mathrm{pgcd}(n,m)\mathbf{Z}$. Comme 10 et 13 sont premiers entre eux, le produit tensoriel est le groupe nul.

6. Déterminer le produit tensoriel $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^* \otimes (\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^* \otimes (\mathbf{Z}/2017\mathbf{Z})^*$.

Au vu de la question 2, ce produit tensoriel est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2016\mathbf{Z}$. Or $\mathrm{pgcd}(4, 12, 2016) = 4$, ainsi le produit tensoriel est un groupe cyclique d'ordre 4.

II

Considérons les matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Déterminer les facteurs invariants dans $\mathbf{R}[X]$ de $A - X\mathrm{Id}$.

La matrice A est donnée par deux blocs de Jordan dont les facteurs invariants sont $(X-1)$ et $(X-1)^2$. Les facteurs invariants de $A - X\mathrm{Id}$ sont donc $X-1, (X-1)^2$.

8. Déterminer les facteurs invariants dans $\mathbf{R}[X]$ de $B - X\mathrm{Id}$.

La matrice B a pour polynôme caractéristique $(X-1)^3$. Ses facteurs invariants sont donc $X-1, (X-1)^2$ ou $(X-1)^3$. Mais le polynôme mininal de B est $(X-1)^2$, puisque $(B - \mathrm{Id})^2 = 0$ et $B \neq \mathrm{Id}$. Comme le polynôme minimal coïncide avec le dernier facteur invariant, les facteurs invariants de $B - X\mathrm{Id}$ sont donc $X-1, (X-1)^2$.

9. Les matrices A et B sont-elles semblables dans $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$?

Elles sont semblables puisque $A - X\mathrm{Id}$ et $B - X\mathrm{Id}$ ont les mêmes facteurs invariants.

10. Les matrices B et C sont-elles semblables dans $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$?

Oui, puisqu'elles sont transposées l'une de l'autre.

III

Soit $A = \{P \in \mathbf{Q}[X]/P(0) \in \mathbf{Z}\}$.

11. Montrer que A est un anneau.

L'évaluation $P \mapsto P(0)$ est un morphisme d'anneaux surjectif $\mathbf{Q}[X] \to \mathbf{Q}$. L'image réciproque par un morphisme d'anneaux surjectif d'un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[X]$. Or $\mathbf{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$. Donc A est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[X]$.

12. Est-il intègre ?

Il est intègre, puisque sous-anneau de l'anneau intègre $\mathbf{Q}[X]$.

13. Montrer que la multiplication dans $\mathbf{Q}[X]$ en fait un A-module.

C'est le cas puisque A est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[X]$.

14. Soit M un sous-A-module de type fini de $\mathbf{Q}[X]$. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que M est contenu dans $\frac{1}{n}A$.

Soit $(P_1, P_2 ... P_k) \in \mathbf{Q}[X]^k$ un système de générateurs de M. Soit n un entier > 0 tel que $nP_1(0)$, $nP_2(0)...nP_k(0) \in \mathbf{Z}$. On a donc nP_1, $nP_2...nP_k \in A$. On a $M = AP_1 + ... + AP_k$ et donc $nM \subset AnP_1 + ... + AnP_k \subset A$ et donc $M \subset \frac{1}{n}A$.

15. Le A-module $\mathbf{Q}[X]$ est-il noethérien ?

S'il était noethérien, et donc de type fini, il existerait un entier $n > 0$ tel que $\mathbf{Q}[X] \subset \frac{1}{n}A$. Or il existe $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P(0) \notin \frac{1}{n}\mathbf{Z}$ et donc $P \notin \frac{1}{n}A$.

16. Montrer que $I = \{P \in A/P(0) = 0\}$ est un idéal de A.

C'est l'image réciproque de 0 par un morphisme d'anneaux.

17. L'idéal I est-il principal dans A ?

Cet idéal n'est autre que $X\mathbf{Q}[X]$, qui est un A-module isomorphe à $\mathbf{Q}[X]$, qui n'est pas de type fini, donc pas monogène, si bien que I n'est pas principal.

18. Est-il de type fini ?

Voir 17.

19. Soient P_1, $P_2 \in A$. Posons $d = \text{pgcd}(P_1(0), P_2(0))$. Soit P un pgcd de P_1 et P_2 dans $\mathbf{Q}[X]$ tel que $P(0) = d$. Montrer qu'il existe Q_1, $Q_2 \in A$ tels que $P = P_1Q_1 + P_2Q_2$.

Par Bézout dans $\mathbf{Q}[X]$, il existe R_1, $R_2 \in \mathbf{Q}[X]$ tels que $P = P_1R_1 + P_2R_2$. On a donc $d = P_1(0)R_1(0) + P_2(0)R_2(0)$. Par ailleurs, par Bézout dans $\mathbf{Z}$, il existe a_1, $a_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $d = a_1P_1(0) + a_2P_2(0)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbf{Q}$ tel que $R_1(0) = a_1 + \lambda P_2(0)$ et $R_2(0) = a_2 - \lambda P_1(0)$. On a alors $P = P_1(R_1 - \lambda P_2) + P_2(R_2 + \lambda P_1)$ et les polynômes $Q_1 = R_1 - \lambda P_2$ et $Q_2 = R_2 + \lambda P_1$ vérifient les conditions demandées.

20. En déduire que tout idéal de type fini de A est principal.

Par une récurrence immédiate, il suffit de montrer que l'idéal I engendré par $(P_1, P_2) \in A^2$ est principal. Reprenons la question 19. Supposons que $d \neq 0$. Montrons que $I = AP$. Puisque $P = P_1Q_1 + P_2Q_2$, on a $AP \subset I$. Par ailleurs, P_1 et P_2 divisent P dans A, puisque $(P_1/P)(0)$ est bien défini (car $P(0) = d \neq 0$) et est dans $\mathbf{Z}$ puisque $d|P_1(0)$. Ainsi, P_1 et P_2 sont dans AP. Donc I est engendré par P.

Il reste à examiner le cas où $d = 0$, c'est-à-dire $P_1(0) = P_2(0) = 0$. On peut supposer P_1 et P_2 non tous deux nuls. Soit $r > 0$ le plus grand entier tel que X^r divise P_1 et P_2 dans $\mathbf{Q}[X]$. Soit n un entier > 0 tel que $Q_1 = nP_1/X^r \in A$ et $Q_2 = nP_2/X^r \in A$. Alors $Q_1(0)$ et $Q_2(0)$ ne sont pas tous deux nuls. Il existe un polynôme Q adapté à Q_1 et Q_2 comme dans la question 19 et on a $AQ_1 + AQ_2 = AQ$. On a $I = AP_1 + AP_2 = \frac{X^r}{n}(AQ_1 + AQ_2) = \frac{X^r}{n}AQ$. Le polynôme $\frac{X^r}{n}Q$ est dans A puisque $r > 0$, si bien que I est principal.