Corrigé de l'examen partiel du 12 novembre 2014.

I

(1) L'ordre de $\mathscr{S}_6$ est 6!, c'est-à-dire 720. Son sous-groupe $\mathscr{A}_6$ étant d'indice 2, il est d'ordre 720/2, soit 360. On a appris en cours que $\mathscr{A}_6$ est le seul sous-groupe distingué non trivial de $\mathscr{S}_6$, et que $\mathscr{A}_6$ est simple.

(2) Soit σ un élément de $\mathscr{S}_6$. Son ordre est le PPCM des longueurs des cycles de sa décomposition en cycles. Les cycles peuvent être de longueurs 2, 3, 4, 5 et 6. S'il y en a deux, leurs longueurs ne peuvent être que $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ ou $(3, 3)$, et les PPCM correspondants sont 2, 6, 4 et 3. S'il y a trois cycles, il sont tous de longueur 2 et leur PPCM est 2. En résumé, les ordres possibles pour les éléments de $\mathscr{S}_6$ sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et bien entendu, on peut construire des éléments de tous ces ordres.

(3) On a $|\mathscr{A}_6| = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Le nombre de 3-Sylow de $\mathscr{A}_6$ divise $2^3 \times 5 = 40$ et est congru à 1 modulo 3. Il ne peut donc être que 1, 4, 10 ou 40. Par ailleurs, comme il n'y a pas d'élément d'ordre 9 dans $\mathscr{A}_6$, les 3-Sylow contiennent, hormis l'élément neutre, exactement tous les éléments d'ordre 3. Si on sépare l'ensemble à 6 éléments et deux parties disjointes à 3 éléments, toute permutation qui est soit l'identité soit une permutation circulaire dans chacune de ces deux parties est un élément d'ordre 3 (ou l'identité). En fait, il est immédiat que ces permutations forment un sous-groupe à 9 éléments de $\mathscr{A}_6$ (isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) et qu'il s'agit donc d'un 3-Sylow. Comme il y a $C_6^3/2 = 10$ telles partitions, on vient de déterminer 10 3-Sylows. On les a tous car tout élément d'ordre 3 de $\mathscr{A}_6$ préserve une partition de l'ensemble à 6 éléments en deux parties à 3 éléments. (En fait, on voit qu'on n'avait pas besoin du théorème de Sylow dans cette question. Le même phénomène se produit avec les deux questions suivantes, puisque $\mathscr{A}_6$ est un groupe donné explicitement. Toutefois, la détermination directe des 5 et 2-Sylows n'est pas aussi simple que celle des 3-Sylows.)

(4) Le nombre de 5-Sylows de $\mathscr{A}_6$ divise 72 et est congru à 1 modulo 5. Il ne peut donc être que 1, 6, 36 ou 72. Remarquons que le nombre de 5-Sylows de $\mathscr{S}_5$ doit diviser 24 et être congru à 1 modulo 5. Il ne peut donc être que 1 ou 6. Ce n'est pas 1 car $\mathscr{S}_5$ n'a pas de sous-groupe distingué à 5 éléments. Il y a donc 6 sous-groupes à 5 éléments dans $\mathscr{S}_5$. Comme il y a 6 parties à 5 éléments dans un ensemble à 6 éléments, on vient de déterminer $6 \times 6 = 36$ sous-groupes à 5 éléments dans $\mathscr{S}_6$, mais ces sous-groupes sont dans $\mathscr{A}_6$ car les cycles de longueur 5 sont des permutations de signature positive. On vient donc de trouver 36 5-Sylows dans $\mathscr{A}_6$. Il n'y en a pas d'autre car ces 36 sous-groupes contiennent tous les éléments d'ordre 5. (Ici on voit que le théorème de Sylow n'était inutile que pour la détermination des 5-Sylows de $\mathscr{S}_5$.)

(5) Le nombre de 2-Sylows doit diviser $3^2 \times 5 = 45$ et être impair. Il ne peut donc être que 1, 3, 5, 9, 15 ou 45. Le sous-groupe engendré par une permutation circulaire des quatre premiers éléments et une permutation des deux derniers est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, a 8 éléments et est donc un 2-Sylow. Chaque 2-Sylow contient donc exactement 4 éléments d'ordre 4. S'il n'y avait pas plus de 15 2-Sylows, il y aurait au maximum 60 éléments d'ordre 4 dans $\mathscr{A}_4$. Or, $\mathscr{S}_4$ a 6 éléments d'ordre 4, et un ensemble à 6 éléments a 15 parties à 4 éléments. On a donc $15 \times 6 = 90$ cycles de longueur 4 dans $\mathscr{S}_6$. Ces éléments sont de signature impaire, mais en composant chacun avec la transposition des deux éléments restants, on obtient 90 éléments d'ordre 4 de $\mathscr{A}_6$. On a donc 45 2-Sylows dans $\mathscr{A}_6$.

II

(6) Il suffit de montrer que $\phi(\sigma)$ est une bijection, et pour cela de montrer que c'est une injection, puisque P est fini. Si $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{\sigma(u), \sigma(v)\}$, on a $\sigma(i) = \sigma(u)$ ou $\sigma(i) = \sigma(v)$, donc $i = u$ ou $i = v$. Dans le premier cas on a $j = v$ et dans le second $j = u$. Dans tous les cas, on a $\{i, j\} = \{u, v\}$.

(7) Soient σ et τ deux éléments de $\mathscr{S}_4$. On a, pour tous i et j, $\phi(\sigma \circ \tau)(\{i, j\}) = \{\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(j))\} = \phi(\sigma)(\{\tau(i), \tau(j)\}) = \phi(\sigma)(\phi(\tau)(\{i, j\})) = (\phi(\sigma) \circ \phi(\tau))(\{i, j\})$.

(8) Si $\phi(\sigma) = 1$, on a $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$, donc $\sigma(i) \in \{i, j\}$ pour toute paire $\{i, j\}$ d'éléments distincts de $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Soit $i \in E$, et soient j et k deux autres éléments distincts et distincts de i. D'après ce qui précède, on a $\sigma(i) \in \{i, j\} \cap \{i, k\} = \{i\}$, et donc $\sigma = 1$, et ϕ est injectif.

(9) S'il y avait un tel point fixe $\{i, j\}$, on aurait $\phi(\sigma)(\{i, j\}) = \{i, j\}$ pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_4$. Mais comme $\phi(1)(\{i, j\}) = \{i, j\}$, l'injectivité de ϕ montre que $\sigma = 1$ (pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_4$), ce qui est une contradiction.

(10) Soient $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ deux éléments de P. Il existe $\sigma \in \mathscr{S}_4$ tel que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$, car i et j sont distincts de même que k et l. L'action est donc transitive.

(11) $\sigma(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$ signifie que σ préserve ou échange 1 et 2. Un tel σ doit nécessairement préserver ou échanger 3 et 4. C'est donc une permutation qui laisse stables les parties $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$ de E. Réciproquement, toute permutation qui laisse stables ces deux parties est dans le stabilisateur de $\{1, 2\}$. Ces permutations forment un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(12) L'action de $\mathscr{S}_4$ sur P étant transitive, les stabilisateurs des éléments de P sont tous conjugués, et donc tous isomorphes au stabilisateur de $\{1, 2\}$.

(13) Soit $\tau = (i, j)$ une transposition de $\mathscr{S}_4$. Soient k et l les deux autres éléments de E. Soit α la transposition de $\mathscr{S}(P)$ qui échange $\{i, k\}$ et $\{j, k\}$, β cette qui échange $\{i, l\}$ et $\{j, l\}$. Elles sont à supports disjoints. On a :

$$\begin{array}{rcccl} \phi(\tau)(\{i,j\}) & = & \{i,j\} & = & \alpha \circ \beta(\{i,j\}) \\ \phi(\tau)(\{k,l\}) & = & \{k,l\} & = & \alpha \circ \beta(\{k,l\}) \\ \phi(\tau)(\{i,k\}) & = & \{j,k\} & = & \alpha \circ \beta(\{i,k\}) \\ \phi(\tau)(\{j,k\}) & = & \{i,k\} & = & \alpha \circ \beta(\{j,k\}) \\ \phi(\tau)(\{i,l\}) & = & \{j,l\} & = & \alpha \circ \beta(\{i,l\}) \\ \phi(\tau)(\{j,l\}) & = & \{i,l\} & = & \alpha \circ \beta(\{j,l\}) \end{array}$$

(14) Un produit de deux transpositions est de signature $+1$, et tout élément σ de $\mathscr{S}_4$ est un produit de transpositions. Il resulte donc de la question précédente que l'image de ϕ est contenue dans $\mathscr{A}(P)$.

(15) Les sous-groupes distingués de l'image de ϕ sont les images par ϕ des sous-groupes distingués de $\mathscr{S}_4$. Ce sont donc les images de $\{1\}$, du sous-groupe K (isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) engendré par les produits de deux transpositions de support disjoints, de $\mathscr{A}_4$ et de $\mathscr{S}_4$.

(16) Les 2-Sylows de $\mathscr{S}_4$ ont 8 éléments de même que les 2-Sylows de $\mathscr{A}(P)$. L'injectivité de ϕ permet de conclure.

(17) Si x est un élément de $\mathscr{A}(P)$ dont l'ordre est une puissance de 2 (qui ne peut d'ailleurs être que 1, 2 ou 4), il appartient à un 2-Sylow de $\mathscr{A}(P)$. Comme il a un conjugué dans chaque 2-Sylow, il a un conjugué dans l'image de ϕ d'après la question précédente.

(19) On a vu dans la question **(5)** que $\mathscr{A}(P)$ possède au moins 90 éléments d'ordre 4. C'est plus que ce que peut contenir l'image de ϕ. Tous ne sont donc pas dans l'image de ϕ.

(20) Il suffit de prendre le cycle de longueur 3 : $(\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\})$. En effet, s'il s'écrivait $\phi(\sigma)$, on aurait $\sigma(1) \in \{1, 3\}$ et $\sigma(1) \in \{2, 4\}$, ce qui est impossible.