Université Paris 7-Denis Diderot | Géométrie
Licence d'enseignement en mathématiques | Année 2001-02

Corrigé de l'EXAMEN du 6 juin 2002

Exercice 1

1.a. C'est un sous-groupe du groupe des isométries de $\mathcal{E}$. En effet, il contient l'identité. La composé de deux isométries de F laisse stable F et l'inverse d'une isométrie de F laisse stable F.
1.b. C'est une traduction directe de l'hypothèse **H2**.
1.c. L'ordre de Isom(F) est la somme des cardinaux des images réciproques par ϕ des éléments de F. Soient $P \in F$ et g une isométrie de F telle que $g(P) = P_0$. On a $\{f \in G/\phi(f) = P\} = \{f \in G/\phi(g \circ f) = P_0\}$. Puisque G est un groupe la composition par g est une bijection. L'ensemble $\{f \in G/\phi(f) = P_0\}$ et l'image réciproque par ϕ de tout élément de F ont donc même cardinaux.
2. Tout élément de F appartient à une face pentagonale. Comme chaque face pentagonale possède 5 sommets, il y a $60/5 = 12$ faces pentagonales. Tout élément de F appartient à deux faces hexagonales ; il y a donc $60 \times 2/6 = 20$ faces hexagonales.
3. Comme s_O est une isométrie de F, l'ensemble F est invariant par s_O. Le barycentre de F est donc aussi invariant par s_O. Comme O est le seul point fixe de s_O, le barycentre de F coïncide donc avec O.
4.a Puisque f est une application affine, $f(O)$ est le barycentre de l'ensemble $f(F)$. Comme F est une isométrie de F, on a $f(F) = F$. On a donc $f(O) = O$.
4.b. Le déplacement F admet au moins un point fixe. C'est donc une rotation ou l'identité d'après la classification des isométries de l'espace.
5.a. Comme f est une isométrie de F et comme les points P', Q et R sont les seuls points de F à distance d de P, les points $f(P')$, $f(Q)$ et $f(R)$ sont les seuls points de F à distance d de $f(P) = P$. On a donc $\{f(P'), f(Q), f(R)\} = \{P', Q, R\}$.
5.b. Supposons qu'on ait $f(P') = P'$, $f(Q) = Q$ et $f(R) = R$. Comme $f(O) = O$, l'application f possède quatre points fixes non coplanaires (à savoir O, P, Q et R); c'est donc l'identité. Supposons qu'on ait $f(P') = P'$, $f(Q) = R$ et $f(R) = Q$. Dans ce cas, $f \circ f$ (qui possède O, P, Q et R comme points fixes) est l'identité ; f est donc une symétrie orthogonale ayant P, P' et O comme point fixe et coïncide donc avec $s_{\{P,P'\}}$.

Montrons que les autres cas ne peuvent intervenir. Supposons qu'on ait $f(P') = Q$, $f(Q) = P'$ et $f(R) = R$. Les segments $[P, Q]$ et $[P, R]$ sont les cotés consécutifs d'un pentagone régulier de coté de longueur d. Les segments $[P, P']$ et $[P, Q]$ (resp. $[P, R]$) sont les cotés consécutifs d'un hexagone (resp. pentagone)régulier de coté de longueur d. On a donc les égalités et inégalités de produits scalaires $(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PR}) \neq (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$. Cela contredit le fait que f, étant une isométrie, préserve le produit scalaire. On exclut de même le cas où $f(P') = R$, $f(Q) = Q$ et $f(R) = P'$, puis le cas où $f(P') = Q$, $f(Q) = R$ et $f(R) = P'$ et enfin le cas où $f(P') = R$, $f(Q) = P'$ et $f(R) = Q$.
6.a. Utilisons la question 1.c. D'après la question 5.b, il y a deux isométries de F qui laissent fixe un point donné de F. Il y a donc $60 \times 2 = 120$ isométries de F.
6.b. Le groupe G comprend l'antidéplacement s_O. La composition par s_O définit une bijection entre les déplacements et les antidéplacements de G. Il y donc autant de déplacements que d'antidéplacements dans G, c'est-à-dire $120/2 = 60$ déplacements.
7.a. L'isométrie f laisse fixe C, puisque C est le barycentre d'un ensemble de points globalement invariant par f. Les points O et C étant fixe par f, la droite (OC) est une droite de points fixes de f. C'est donc l'axe de f.
7.b. Par le même raisonnement qu'en 7.a., on montre que l'axe de f est la droite passant par O et le milieu de l'arête. La mesure de f est alors égale à π.

7.c. On peut démontrer que les rotations suivantes sont des isométries de F : les rotations d'axe (OC) comme dans 7.a. et de mesure $2k\pi/5$ avec $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ dans le cas pentagonal et de mesure $2k\pi/3$ avec $k \in \{1, 2\}$ dans le cas hexagonal. (Attention dans le cas hexagonal les rotations de mesure $2k\pi/6$ avec $k \in \{1, 3, 5\}$ ne conviennent pas.) Si on prend garde que les axes de ces rotation sont invariants par s_O, on constate qu'il y a 12 faces pentagonales et 20 faces hexagonales, qui sont échangées deux à deux par s_O et donnent donc lieu à $12/2 = 6$ et $20/2 = 10$ axes de rotations distincts. Cela donne $12 \times 4/2 = 24$ rotations issues du cas pentagonal et $20 \times 2/2 = 20$ rotations issues du cas hexagonal.

Par ailleurs, il y a deux types d'arêtes de F. Avec les notations de **H2**, la rotation d'axe $(OP")$ et de mesure π, où $P"$ est milieu de $[P, Q]$ ou $[P, R]$ ne convient pas. Il reste la rotation d'axe $(OP")$ et de mesure π, qui convient. L encore l'axe de rotation est invariant pas s_O. Il y a $60/2 = 30$ telles arêtes et donc $30/2 = 15$ axes de rotation distincts.

Si on tient compte de l'identité, on a trouvé $24 + 20 + 15 + 1 = 60$ déplacements de F.

Les antidéplacements de F sont obtenus en composant ces déplacements avec s_O.

Exercice 2

1.a. Pour tout $\overrightarrow{v} \in P$, le cercle $t_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{C})$ a pour centre $t_{\overrightarrow{v}}(O)$. Pour que $t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, il est donc nécessaire de prendre $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OO'}$. Cette condition est suffisante puisque $t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}'$ ont même rayon (à savoir le rayon de $\mathcal{C}$ une translation et une symétrie orthogonale sont des isométries).
1.b. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$. Les points A et B étant sur $\mathcal{D}$, ils sont invariants par σ ; comme ils sont sur $\mathcal{C}$, leurs images par σ (à savoir eux-mêmes) sont sur $\mathcal{C}' := \sigma(\mathcal{C})$. Enfin, $t_{(-\overrightarrow{u})}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}' = t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{C})$. Par définition de $\overrightarrow{u}$, de E et de F, on a $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{FB}$, ce qui fait déjà de $ABFE$ un parallélogramme. En outre, puisque $O' = \sigma(O)$, la droite (OO') est perpendiculaire à $\mathcal{D}$; il en est donc de même pour les droites (AE) et (BF) : le quadrilatère $ABFE$ est un rectangle.
2. On a également $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OO'}$, donc aussi $(MN) \perp \mathcal{D}$.
3.a. Puisque $N = t_{\overrightarrow{u}}(M)$, que $\mathcal{C}' = t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{C})$ et que $M \in \mathcal{C}$, on a $N \in \mathcal{C}'$. On sait que $\sigma^{-1} = \sigma$; de là $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}')$, étant donné que $\mathcal{C}' = \sigma(\mathcal{C})$. Comme $Q = \sigma(N)$ et que $N \in \mathcal{C}'$, on obtient $Q \in \mathcal{C}$.
3.b. $(i) \iff (ii)$ Dans tous les cas, $OO'NM$ est un parallélogramme et $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[OO']$. Par ailleurs, on a $Q = M$ ssi $\sigma(N) = M$, c'est-à-dire ssi $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[MN]$. De ces remarques, il résulte que $Q = M$ si et seulement si $OO'NM$ est un rectangle (parallélogramme *et* trapèze isocèle).

$(ii) \iff (iii)$ Le parallélogramme $OO'NM$ est un rectangle si et seulement si les droites (OO') et (OM) sont perpendiculaires, c'est-à-dire ssi $(OM) = \mathcal{D}'$.

4.a. Puisque σ est un antidéplacement, que $\sigma(A) = A$, que $\sigma(B) = B$ et que $\sigma(N) = Q$, on a $\widehat{QAB} = -\widehat{NAB} = \widehat{BAN}$.
4.b. Par définition de A, B, M et d'après 3.a. , on a $\widehat{AQ, AB} = \widehat{MQ, MB}$ pour cause de cocyclicité sur $\mathcal{C}$.
4.c. Du 4.a. résulte l'égalité d'angles de droites $\widehat{AQ, AB} = \widehat{AB, AN}$, valide dans tous les cas.

Si $Q = M$, on sait (*cf.* 3.b.) que $M = U$ ou $M = V$. Or (MN) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$, donc à $\mathcal{D}'$: ainsi (MN) est la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en M (et, d'ailleurs, à $\mathcal{C}'$ en N). On connaît alors l'égalité $\widehat{AB, AM} = \widehat{MB, \mathcal{T}}$. On obtient donc en reportant $\widehat{AB, AN} = \widehat{AQ, AB} = \widehat{AM, AB} = \widehat{\mathcal{T}, MB} = \widehat{MN, MB}$.

Si $Q \neq M$, on peut (*cf.* 4.b.) écrire $\widehat{AB, AN} = \widehat{AQ, AB} = \widehat{MQ, MB}$. En outre, les droites (NQ) (par définition de Q) et (MN) (*cf.* 2.) sont toutes deux perpendiculaires à $\mathcal{D}$: les points M, N, Q sont donc alignés et on obtient bien $\widehat{AB, AN} = \widehat{MQ, MB} = \widehat{MN, MB}$
5.a. Récrivant $\widehat{AB, AN} = \widehat{MN, MB}$ sous la forme $\widehat{AB, AN} + \widehat{MB, MN} = \widehat{0}$, on obtient $\widehat{MB, AN} = \widehat{MB, MN} + \widehat{MN, AB} + \widehat{AB, AN} = \widehat{MN, AB}$. Or on sait (*cf.* 2. de nouveau) que ce dernier angle est droit.
5.b. Du 5.a. et du 2. il résulte que B est l'orthocentre du triangle AMN. La troisième hauteur de celui-ci est donc (BN), d'où $(BN) \perp (AM)$.
6. Si $M = A$, le point N est diamétralement opposé à B sur $\mathcal{C}'$. Le triangle AMN dégénère et se réduit au segment $[AN]$.

Si $M = B$, le point N est diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}'$. L'orthocentre du triangle AMN, rectangle en M, est bien $B = M$.

Si $M = E$, on a $N = A$ et AMN dégénère en segment $[AE]$.
Si $M = F$, on a $N = B$; AMN est rectangle en N, d'orthocentre $B = N$.