Université Paris 7 — Année 2009/2010

Fonctions analytiques — Licence S5, M23040

Feuille 7

Exercice 1 .

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2 . Pour tout $R > 0$ on note $C(R) \subset \mathbb{C}$ le cercle centré à l'origine et de rayon R parcouru dans le sens positif. Pour chaque intégrale suivante, déterminer pour quels réels $R > 0$ elle est définie et donner sa valeur en fonction de R.

$$\int_{C(R)} \frac{dz}{z+z^3} \qquad \int_{C(R)} \frac{z^2}{1+z^4} dz \qquad \int_{C(R)} \frac{dz}{(z^2+1)^3}$$

$$\int_{C(R)} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3} dz \qquad \int_{C(R)} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n},\ n \in \mathbb{N} \qquad \int_{C(R)} \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

Exercice 3 . Caculer les intégrales suivantes.

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4} \quad (D\ : |z-1| < 1). \tag{1}$$

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} \quad (D\ : |z-1-i| < 2). \tag{2}$$

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2} \quad (D\ :\ 2 < |z| < 4). \tag{3}$$

Exercice 4. Déterminer les développements en série de Laurent en 0 de $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ dans chacun des domaines suivants

$$\mathbb{D}, \qquad A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}.$$

Exercice 5 . Déterminer les développements en série de Laurent en 0 de $f(z) = \frac{z}{z-1}e^z$ dans les domaines $\mathbb{D}$ puis $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Exercice 6 . Développer les fonctions suivantes en séries de Laurent en 0 dans chacun des ouverts donnés.

1. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ et $|z| > 2$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-a)}$ dans $0 < |z| < |a|$ et dans $|z| > |a|$.
3. $f(z) = z^2 e^{1/z}$ dans $\mathbb{C}^*$.
4. $f(z) = e^{z+1/z}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 7 . Déterminer la couronne de convergence de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|}z^n$ où $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 . A l'aide du théorème de Rouché, trouver le nombre de racines des équations ci-dessous dans les domaines indiqués entre parenthèses :

$$z^4 - 3z + 1 = 0, \; (D \; : |z| < 1). \qquad 2z^4 - 5z + 2 = 0, \; (D \; : |z| < 1).$$
$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0, \; (D \; : |z| < 1). \qquad z^3 - 12z + 2 = 0, \; (D \; : |z| < 2).$$
$$z^4 - 9z + 1 = 0, \; (D \; : |z| < 2). \qquad z^5 + z^3 - 4z + 1 = 0, \; (D \; : \; 1 < |z| < 2).$$

Exercice 9 . Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \cos t}, \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{a + \cos t}\, dt, \qquad I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{b + \cos t + \sin t},$$

où a et b sont des réels vérifiant $a > 1$ et $b > \sqrt{2}$.

Exercice 10. Soient r et R deux réels vérifiant $0 < r < 1 < R$. On note $\Gamma_{R,r} \subset \mathbb{C}$ le lacet composé des quatre chemins suivants.

$$\gamma_1(t) = t, \; t \in [-R, -r], \qquad \gamma_2(t) = re^{i(\pi - t)}, \; t \in [0, \pi],$$
$$\gamma_3(t) = t, \; t \in [r, R], \qquad \gamma_4(t) = Re^{it}, \; t \in [0, \pi],$$

il est conseillé de faire un dessin. On note, par abus de notation, $\operatorname{Log} z$ la détermination du logarithme et $\sqrt{z}$ la détermination de la racine carrée sur $\mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in]-\infty, 0]\}$ correspondant à $-\pi/2 < \operatorname{Arg} z < 3\pi/2$.

1. Calculer
$$\int_{\Gamma_{R,r}} \frac{\operatorname{Log} z}{\sqrt{z}(1 + z^2)}\, dz,$$
où $\Gamma_{R,r}$ est parcouru positivement.
2. Pour tout $\rho > 0$ on note $C(\rho)$ le demi-cercle $\gamma(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, parcouru positivement. Montrer que
$$\int_{C(\rho)} \frac{\operatorname{Log} z}{\sqrt{z}(1 + z^2)}\, dz \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{C(\rho)} \frac{\operatorname{Log} z}{\sqrt{z}(1 + z^2)}\, dz \underset{\rho\to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. En déduire la valeur des intégrales suivantes.
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{\sqrt{x}(1 + x^2)}\, dx, \qquad J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x^2)}.$$

Exercice 11 . Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Pour tout $R > 1$ on considère le lacet Γ_R composé des chemins suivants.

$$\gamma_1(t) = t, \; t \in [0, R], \qquad \gamma_2(t) = Re^{it}, \; t \in [0, 2\pi/n],$$
$$\gamma_3(t) = (R - t)e^{i\frac{2\pi}{n}}, \; t \in [0, R].$$

Pour tout $R > 1$ calculer

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^n}$$

où Γ_R est parcouru positivement. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Exercice 12. Pour tout $R > 0$ on note Γ_R le lacet composé des chemins suivants.

$$\gamma_1(t) = t,\ t \in [-R, -1/R], \qquad \gamma_2(t) = \frac{1}{R}e^{it},\ t \in [\pi, 2\pi],$$

$$\gamma_3(t) = t,\ t \in [1/R, R], \qquad \gamma_4(t) = Re^{it},\ t \in [0, \pi].$$

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale impropre (et convergente)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

1. Calculer $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$ pour tout $R > 0$, où Γ_R est parcouru positivement.
2. Montrer que

$$\left(\operatorname{Im} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \operatorname{Im} \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

3. Pour tout $R > 0$ on pose : $J(R) = \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. En considérant l'intervalle $[0, \pi]$ comme la réunion $[0, \varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi - \varepsilon] \cup [\pi - \varepsilon, \pi]$, montrer que

   $$|J(R)| \leqslant 2\varepsilon + (\pi - 2\varepsilon)e^{-R \sin \varepsilon}.$$

   (b) En déduire que $J(R) \longrightarrow_{R\to+\infty} 0$.
4. Montrer que

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} i\pi.$$

5. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Exercice 13. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{3}e^{-\sqrt{3}/2}\cos(\frac{1}{2}) \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{2\pi}{3}e^{-\sqrt{3}/2}\sin(\frac{1}{2}).$$

On pourra considérer, pour tout $R > 1$, le lacet Γ_R composé des chemins suivants

$$\gamma_1(t) = t,\ t \in [-R, R]; \qquad \gamma_2(t) = Re^{it},\ t \in [0, \pi]$$

et l'intégrale

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}\,dz$$

où Γ_R est parcouru positivement.

Exercice 14.

1. Démontrer qu'il existe une unique fonction méromorphe f sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ qui vérifie

$$f(x) = \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_- \setminus \{-1, -2\}$.

2. Que valent alors $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x-i\epsilon)$ et $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x+i\epsilon)$, lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$?
3. Déterminer les pôles et les résidus de f.
4. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}\,dx.$$