Université Paris 7 — Année 2009/2010
Fonctions analytiques — Licence S5, M23040

Feuille 6

Exercice 1 . On considère une suite (a_n) du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0}(1-|a_n|)$ est convergente. Pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$ on pose

$$b_n(z) = \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z}$$

si $a_n \neq 0$. Si $a_n = 0$ on pose $b_n(z) = -z$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que b_n est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ puis que $|b_n(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{D}$ montrer que

$$1 - b_n(z) = \frac{1-|a_n|}{1 - \overline{a}_n z}\Big(1 + \frac{|a_n|}{a_n}z\Big).$$

   En déduire que

$$|1 - b_n(z)| \leqslant 2\frac{1-|a_n|}{1-|z|}$$

   pour tout $z \in \mathbb{D}$.
3. En déduire que la série $\sum\big(1-b_n(z)\big)$ est normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{D}$.
4. Montrer que le produit

$$B(z) = \prod_{n\geqslant 0} b_n(z)$$

   est uniformément convergent sur toute partie compacte de $\mathbb{D}$ et que B est une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{D}$.
5. Montrer que B s'annule en chaque point a_n et que B ne s'annule pas ailleurs qu'en ces points.

   La fonction B est appelée le *produit de Blaschke* associée à la suite (a_n)

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ est normalement convergente.

1. Montrer qu'il existe une fonction entière F telle que les zéros de F sont précisément les nombres a_n.

   Indication. On pourra considérer les fonctions $z \mapsto 1 - \frac{z}{a_n}$
2. La fonction F est-elle unique ?

Exercice 3 . Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert. On dira qu'une fonction E est unitaire si elle est holomorphe dans $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et si $|f(z)| = 1$ pour tout z vérifiant $|z| = 1$.

1. Montrer qu'une fonction unitaire dans $\mathbb{D}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{D}$.
2. Montrer qu'une fonction unitaire dans $\mathbb{D}$ n'a qu'un nombre fini de zéros.
3. Montrer qu'une fonction unitaire sans zéro est une constante.
4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{D}$, la fonction f_a définie par $f_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ est unitaire.
5. Soit E une fonction unitaire sur $\mathbb{D}$ ayant les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pour zéros (chacun étant compté avec son ordre de multiplicité). Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| = 1$ telle que
$$E(z) = c \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}$$
pour tout $z \in \mathbb{D}$.
6. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ non identiquement nulle et supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ sur $\mathbb{D}$. Soit E une fonction unitaire dans $\mathbb{D}$ telle que $f(z)/E(z)$ soit holomorphe dans $\mathbb{D}$. Montrer que l'on a
$$\forall z \in \mathbb{D},\ |f(z)| \leq M|E(z)|.$$
Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Montrer que
$$\forall n \geq 1,\ |f(0)| \leq M|a_1|\,|a_2| \cdots |a_n|.$$
En déduire que si $f(0) \neq 0$, la série $\sum_{n\geq 1}(1 - |a_n|)$ converge.

   Indication. On pourra remarquer que pour tout réel $x \in [0, 1[$ on a $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

Exercice 4 . Soit f une fonction entière vérifiant $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1$. On sait d'après l'exercice 3 que f a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$.

Soit $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de f dans D , chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. En considérant la fonction sur $\mathbb{D}$
$$z \mapsto \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \overline{a}_j z}{z - a_j},$$
montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ vérifiant $|c| = 1$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(z) = kz^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 5 . Donner une nouvelle démonstration du principe du maximum utilisant le fait qu'une fonction holomorphe non constante est ouverte.