Université Paris 7 | Année 2009/2010
Fonctions analytiques | Licence S5, M23040

**Feuille 5**

**Exercice 1.** On considère la partie

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$ et continue et bornée sur $\overline{\Omega}$, il existe donc $A > 0$ tel que $|f(z)| \leq A$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$. On suppose que

$$\begin{cases} |f(z)| \leq M_1 & \text{pour } \operatorname{Re} z = 0, \\ |f(z)| \leq M_2 & \text{pour } \operatorname{Re} z = 1, \end{cases}$$

où $M_1$ et $M_2$ sont des constantes réelles strictement positives.

On veut montrer que pour tout $z \in \overline{\Omega}$ on a

$$|f(z)| \leq M_1^{1-x} M_2^x \tag{1}$$

où $x = \operatorname{Re} z$.

Pour tout $R > 0$ on considère la bande ouverte verticale

$$\Omega_R = \{z \in \Omega \mid |\operatorname{Im} z| < R\}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction

$$f_\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f_\varepsilon(z) = f(z) e^{z \operatorname{Log}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)} e^{\varepsilon z^2}.$$

1. Montrer les inégalités suivantes.
   (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} z = 0$ et $|\operatorname{Im} z| \leq R$ : $|f_\varepsilon(z)| \leq M_1$.
   (b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} z = 1$ et $|\operatorname{Im} z| \leq R$ : $|f_\varepsilon(z)| \leq M_1 e^\varepsilon$.
   (c) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ et $|\operatorname{Im} z| = R$ :
   $$|f_\varepsilon(z)| \leq \max\left(A \frac{M_1}{M_2} e^\varepsilon e^{-\varepsilon R^2}, A \frac{M_2}{M_1} e^\varepsilon e^{-\varepsilon R^2}\right).$$
2. En déduire pour tout $z \in \overline{\Omega_R}$ :
   $$|f_\varepsilon(z)| \leq \max\left(M_1 e^\varepsilon, A \frac{M_1}{M_2} e^\varepsilon e^{-\varepsilon R^2}, A \frac{M_2}{M_1} e^\varepsilon e^{-\varepsilon R^2}\right).$$
3. Montrer ensuite que $|f_\varepsilon(z)| \leq M_1 e^\varepsilon$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$.
4. En déduire pour tout $z \in \overline{\Omega}$ :
   $$|f(z)| \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^x \leq M_1.$$

   En déduire l'inégalité (1).

5. En considérant la fonction $gz) = e^{e^{i(1-2z)\frac{\pi}{2}}}$ montrer que l'hypothèse que $f$ est bornée est nécessaire au résultat.

**Exercice 2.** On pose

$$\Omega = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z| < 1\}.$$

Pour tout $w \in \Omega$ on pose

$$\Phi(w) = \frac{1-w}{1+w}.$$

1. Montrer que $\Phi$ est une fonction holomorphe sur $\Omega$ et que $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{D}$.
2. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} f(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$\text{(2)} \qquad \frac{1-|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

*Indication.* Appliquer le Lemme de Schwarz à la fonction $\Phi \circ f$ puis remarquer que

$$(2) \quad \Leftrightarrow \frac{1-|f(z)|}{1+|f(z)|} \le |z| \quad \text{et} \quad \frac{|f(z)|-1}{1+|f(z)|} \le |z|$$

**Exercice 3.** Montrer que la suite de fonctions $z \mapsto n\operatorname{Log}(1+\frac{z}{n})$ converge vers la fonction $z \mapsto z$ uniformément sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

En déduire que la suite de fonctions $z \mapsto (1+\frac{z}{n})^n$ converge vers la fonction $z \mapsto e^z$ uniformément sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

**Exercice 4.** Montrer que $z \mapsto \prod_{n\ge 0}(1+z^{2^n})$ est uniformément convergent sur les compacts du disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

**Exercice 5.** Montrer que les sommes des séries suivantes sont des fonctions holomorphes dans les domaines de $\mathbb{C}$ indiqués entre parenthèses.

$$(1)\sum_{1}^{+\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n \ (|z|<1), \qquad (2)\sum_{1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}\sin nz \ (|\operatorname{Im} z|<1), \qquad (3)\sum_{0}^{+\infty}\frac{\cos nz}{n!} \ (z \in \mathbb{C})$$

Dans chaque cas donner la dérivée de la fonction limite en terme de série.

**Exercice 6.** Montrer que les produits suivants sont des fonctions holomorphes dans les domaines de $\mathbb{C}$ indiqués entre parenthèses.

$$(1)\prod_{1}^{+\infty}(1-\frac{z}{n})e^{z/n} \ (z \in \mathbb{C}), \qquad (2)\prod_{1}^{+\infty}\cos\frac{z}{n} \ (z \in \mathbb{C}), \qquad (3)\prod_{1}^{+\infty}(1+z^{2n}n^z) \ (|z|<1).$$