Université Paris 7 — Année 2009/2010
Fonctions analytiques — Licence S5, M23040

Feuille 4

Exercice 1.

1. On considère sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ l'équation différentielle :

$$f'(z) = 5f^2(z) + 5z^4. \tag{1}$$

Soient $z_0 \in U$ et $f_1, f_2 : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes qui sont solutions de (1) et vérifient $f_1(z_0) = f_2(z_0)$. Montrer que $f_1 = f_2$.

2. Plus généralement, soit P un polynôme à coefficients complexes et à $n+1$ variables, $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle sur U :

$$f^{(n)}(z) = P\big(z, f(z), f'(z), \dots, f^{(n-1)}(z)\big). \tag{2}$$

Soient $z_0 \in U$ et $f_1, f_2 : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes qui sont solutions de (2) et vérifient $f_1(z_0) = f_2(z_0)$, $f_1'(z_0) = f_2'(z_0), \dots, f_1^{(n-1)}(z_0) = f_2^{(n-1)}(z_0)$. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 2. Soit $\gamma = [A, B] + [B, C] + [C, D] + [D, A]$ le bord (parcouru dans le sens direct) du carré de sommets $A = 1 - i$, $B = 1 + i$, $C = -1 + i$, $D = -1 - i$. Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_\gamma dx, \int_\gamma x\, dx, \int_\gamma x^2\, dx, \int_\gamma y\, dx, \int_\gamma y^2\, dx, \int_\gamma y^3\, dx,$
2. $\displaystyle\int_\gamma x\, dx + y\, dy, \int_\gamma x\, dy + y\, dx, \int_\gamma x\, dy - y\, dx,$
3. $\displaystyle\int_\gamma dz, \int_\gamma z\, dz, \int_\gamma x\, dz, \int_\gamma z\, dx,$
4. $\displaystyle\int_\gamma z^{-1}\, dz, \int_\gamma z^{-2}\, dz, \int_\gamma z^n\, dz$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Existe-t-il une fonction f holomorphe sur un voisinage du point $z = 0$ et satisfaisant à l'une des conditions suivantes (où $n \in \mathbb{N}^*$) ?

(1) $f(\frac{1}{n}) = \sin \frac{\pi n}{2}$. (2) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \cos \pi n$. (3) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1}$. (4) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+\cos \pi n}$

(5) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$. (6) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1}$. (7) $f(\frac{1}{n}) = e^{-n}$.

Exercice 4.

1. Soit f une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, holomorphe sur $\mathbb{D}$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle.
2. On ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \leq \theta \leq \pi$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 5. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \geq 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

Exercice 6.

1. Soit f analytique sur un disque $|z - z_0| \leq R$ et telle qu'il existe un certain z_1 avec $|z_1 - z_0| < R$ tel que $|f(z)| > |f(z_1)|$ pour $|z - z_0| = R$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans le disque ouvert $D(z_0, R)$.
2. Soient f_n des fonctions holomorphes sur un voisinage commun U d'un disque fermé $\overline{D(z_0, R)}$ qui convergent uniformément sur toute partie compacte de U. Soit F la fonction limite. On suppose que F n'a aucun zéro sur le cercle $|z - z_0| = R$, et qu'elle a au moins un zéro dans le disque ouvert $D(z_0, R)$. Montrer en appliquant la question précédente à f_n que pour n assez grand la fonction f_n a au moins un zéro dans $D(z_0, R)$.
3. En déduire le *Théorème de Hurwitz* : Soient f_n des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ convergeant vers une fonction F uniformément sur tout compact de Ω. On suppose que les fonctions f_n n'ont pas de zéro sur Ω.

   Montrer que si F n'est pas identiquement nulle alors F ne s'annule pas sur Ω.

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes convergeant vers une fonction $F : U \to \mathbb{C}$, uniformément sur tout compact de U. On suppose que les fonctions f sont injectives.

Montrer alors que F est soit constante soit une fonction injective sur U.

Indication. Pour tout $z_1 \in U$, on pourra appliquer le théorème de Hurwitz à la suite de fonctions $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$.

Exercice 8. Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe des constantes $M, R > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$|f(z)| \leq M|z|^n$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$. Donner plusieurs démonstrations du fait que f est un polynôme de degré au plus n :

- en utilisant une formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$, avec comme contour les cercles de rayon R centrés en l'origine, ou en z si l'on veut,
- en utilisant les formules de Cauchy pour $f^{(m)}(0)$, avec $m \geq n + 1$,
- en appliquant le théorème de Liouville à $(f(z) - P(z))/z^{n+1}$ avec P le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre n.

Exercice 9. Soit g une fonction entière. On suppose que

$$|g(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$$

et on veut montrer que g est une fonction polynomiale.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de g est non vide.
2. Montrer que l'ensemble des zéros de g est borné puis fini.

   Soient $z_1, \ldots, z_n$ les zéros de g. Les z_i ne sont pas nécessairement distincts, ainsi la fonction entière

$$z \mapsto \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)}$$

n'a pas de zéro. On pose

$$h(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)}{g(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

3. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives $M_1, R_1 > 0$ telles que

$$|h(z)| \leq M_1 |z|^n$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R_1$. En déduire que h est une fonction entière polynomiale.

4. Conclure que g est aussi une fonction entière polynomiale. Plus précisément, montrer qu'il existe une constante non nulle $a \in \mathbb{C}^*$ telle que

$$g(z) = a \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 10. Soit $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire $|z| < 1 \Rightarrow |\phi(z)| < 1$.

Exercice 11 . On note $\mathbb{D}$ le disque ouvert unité centré à l'origine.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$, on considère la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{D} &\to \mathbb{D} \\ z \mapsto h(z) &= \frac{z - z_0}{z\overline{z}_0 - 1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Montrer que h est une bijection holomorphe et que son application réciproque h^{-1} est aussi holomorphe. Une telle fonction est appelée une *transformation conforme* de $\mathbb{D}$.

Inversement, soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une transformation conforme. On pose $z_0 = f(0)$ et $g = h \circ f$ où h est la transformation conforme définie par (3).

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$|g(z)| \leq |z|.$$

3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a également

$$|g^{-1}(z)| \leq |z|.$$

4. En déduire qu'il existe une constante réelle θ telle que

$$g(z) = e^{i\theta} z \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

5. En conclure que pour toute transformation conforme $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ il existe $\omega \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \omega}{z\overline{\omega} - 1} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$