Université Paris 7 — Année 2009/2010
Fonctions analytiques — Licence S5, M23040

Feuille 3

Dans cette liste, $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe. Pour toute fonction $f : U \to \mathbb{C}$ on note respectivement P et Q sa partie réelle et imaginaire : $f(z) = P(z) + iQ(z)$ pour tout $z \in U$.

Exercice 1. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. On suppose $Q \equiv 0$. Montrer que f est constante.
2. On suppose $P = Q^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que P et Q sont des fonctions harmoniques sur U.

Exercice 3. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. On considère la fonction argument $\arg : \Omega \to]-\pi, \pi[$.

1. Montrer que la fonction arg est harmonique sur Ω.
2. Montrer que la fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $h(z) = \mathrm{Log}\,|z|$ est harmonique.
3. Pour tout $z \in \Omega$ on pose $f(z) = \mathrm{Log}\,|z| + i\arg(z)$. Montrer que f est holomorphe sur Ω et calculer $f'(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 4. A l'aide de la formule intégrale de Cauchy calculer les intégrales suivantes (on suppose que toutes les circonférences sont parcourues dans le sens triginométrique).

$$I_1 = \int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}. \quad I_2 = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}. \quad I_3 = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}.$$
$$I_4 = \int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz. \quad I_5 = \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3} \quad I_6 = \int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$$
$$I_7 = \int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}, \quad (|a| < r < |b|,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

Exercice 5. On pose $U = \{z \in \mathbb{C} \,||z| < 2\}$. Soit Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soient z_1, z_2 des complexes tels que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$. On note Γ le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique.

1. Calculer l'intégrale
$$I = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$
2. Calculer $\lim_{z_2 \to z_1} I$.

Exercice 6. Pour $R > 0$ on considère l'intégrale

$$I(R) = \int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$$

où le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique.

1. Déterminer pour quels réels R l'intégrale $I(R)$ est définie.
2. Calculer $I(R)$ en fonction de R.

Exercice 7 . Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe une partie ouverte et non vide $V \subset U$ telle que f s'annule sur V. Montrer que f est identiquement nulle sur U.

(*Indication : Considérer le plus grand ouvert $W \subset U$ sur lequel f s'annule, c'est-à-dire $W = \mathrm{Int} f^{-1}(0)$. Si $W \neq U$ considérer un point sur la frontière de W et utiliser le fait que f est analytique.*)

Exercice 8 .[Principe du maximum] Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $|f|$ admet un maximum local en un point $z_0 \in U$.

1. A l'aide de la formule de la moyenne, montrer que $|f|$ est constante sur un voisinage de z_0.
2. En déduire que f est constante sur un voisinage de z_0.
3. Conclure que f est constante sur U (*Principe du maximum*).
4. Existe-t-il un *principe du minimum*?

Exercice 9 .[Lemme de Schwarz] On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ et, pour tout $r > 0$, $D(r) \subset \mathbb{C}$ le disque de rayon r centré à l'origine. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe non constante vérifiant $f(0) = 0$. On veut montrer le *lemme de Schwarz*, c'est-à-dire :

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D} \tag{1}$$

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2}$$

De plus s'il y a égalité dans (1) en un point $z_0 \in \mathbb{D}$ alors il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On aura la même conclusion si (2) est une égalité.

Pour cela on pose $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, on admet que g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ (ce fait sera vu plus tard).

1. Montrer à l'aide du principe du maximum que pour tout $r \in]0, 1[$ et tout $z \in D(r)$ on a $|g(z)| < 1/r$.
2. En déduire l'inégalité (1).
3. Montrer que s'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et vérifiant $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
4. Montrer de même que si $|f'(0)| = 1$ alors il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et vérifiant $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 10 . Soient $u, v : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions harmoniques. On dit que v est une *conjuguée harmonique* de u si la fonction $u + iv$ est holomorphe sur U.

Montrer que si v et w sont deux conjuguées harmoniques de u, alors elles sont égales à une constante près, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle c telle que $w(z) = v(z) + c$ pour tout $z \in U$.

Exercice 11 . Trouver des domaines de définition Ω (le plus grand possible) et des fonctions holomorphes $f = u + iv$ sur Ω étant donné la partie réelle u ou la partie imaginaire v.

1. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
2. $u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$
3. $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

Exercice 12. On considère une fonction harmonique $u : U \to \mathbb{R}$. On pose pour tout $z \in U$:

$$f(z) = (u_x - iu_y)(z).$$

1. Montrer que f est holomorphe.

Soit $z_0 \in U$ et soit g une primitive de f définie dans un voisinage $V_{z_0} \subset U$ de z_0.

2. Montrer qu'il existe une constante réelle c telle que $\operatorname{Re} g = u + c$.
3. En déduire que localement toute fonction harmonique admet une conjuguée harmonique.

Exercice 13. A l'aide de l'exercice 12, montrer qu'une fonction harmonique non constante n'a ni maximum local ni minimum local.