Université Paris 7 — Année 2009/2010
Fonctions analytiques — Licence S5, M23040

Feuille 2

Exercice 1. Montrer que cos et cosh sont des fonctions paires sur $\mathbb{C}$ et sin et sinh des fonctions impaires sur $\mathbb{C}$ et donner leurs représentations comme séries entières.

Prouver les relations suivantes.

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z); \quad \sin(iz) = i\sinh(z)$$

$$\cos(iz) = \cosh(z); \quad \sinh(iz) = i\sin(z); \quad \cosh(iz) = \cos(z).$$

Exercice 2. Etablir les formules

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

pour tous $z, w \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ on a

$$\sin(a+ib) = \sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b).$$

On suppose maintenant a et b réels. Montrer que

$$|\sin(a+ib)|^2 = \sin^2(a) + \sinh^2(b)$$

En déduire les nombres complexes $z = a + ib$ tels que $\sin(z) = 0$. Donner une autre preuve.

Exercice 4. Montrer que

$$|\cos(a+ib)|^2 = \cos^2(a) + \sinh^2(b) = \cosh^2(b) - \sin^2(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\cos(z) = 0$.

Exercice 5.

1. Montrer que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$ vérifiant $-\pi < \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w < \pi$ on a
$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w.$$
2. Montrer que pour tous $h, k \in \mathbb{C}$ vérifiant $|h| < 1,\ |k| < 1$ on a
$$\operatorname{Log}(1+h+k+hk) = \operatorname{Log}(1+h) + \operatorname{Log}(1+k).$$

Exercice 6. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus\,]-\infty, 0]$. Déterminer pour tout $z_0 \in \Omega$ la série de Taylor de la fonction $z \mapsto \operatorname{Log} z$, $z \in \Omega$, ainsi que son rayon de convergence R_0.

Soit $z_0 \in \Omega$, pour tout $z \in D(z_0, R_0)$, on note $f(z)$ la somme de la série de Taylor de $\operatorname{Log} z$ en z_0. A-t-on $f(z) = \operatorname{Log} z$ pour tout $z \in D(z_0, R_0)$?
(*Ind.* séparer les cas $\operatorname{Re} z_0 < 0$ et $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$).

Exercice 7. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Exercice 8 . Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$, on pose $f'(z_0) = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On pose aussi $P = \mathrm{Re}\, f$ et $Q = \mathrm{Im}\, f$, on a donc pour tout $z = x + iy \in U$: $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} L_{z_0} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ h = (h_1, h_2) &\mapsto L_{z_0}(h) = \big(\mathrm{Re}\,(h_1 + ih_2) f'(z_0), \mathrm{Im}\,(h_1 + ih_2) f'(z_0)\big) \\ &\qquad\qquad\quad = (ah_1 - bh_2, bh_1 + ah_2). \end{aligned}$$

On estime U comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on considère enfin l'application $F : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big)$.

1. Montrer que
$$\frac{F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - F(x_0, y_0) - L_{z_0}(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to (0,0)]{} (0, 0).$$
2. En déduire que F est différentiable au point (x_0, y_0) et que $Df_{(x_0,y_0)} = L_{z_0}$.
3. Donner la matrice jacobienne de F au point (x_0, y_0)
4. En déduire les *équations de Cauchy-Riemann* :
$$\begin{cases} P_x(x_0, y_0) &= Q_y(x_0, y_0) \\ P_y(x_0, y_0) &= -Q_x(x_0, y_0) \end{cases}$$
où $P_x(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0), \ldots$
5. En déduire qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe si, et seulement si, l'application $F : U \to \mathbb{R}^2$ est différentiable et les dérivées partielles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.
6. On suppose f holomorphe. Montrer qu'en tout point $z_0 \in U$ on a
$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \overset{\text{def}}{=} f'(z_0) = \frac{1}{2}(f_x - if_y)(z_0).$$
Montrer de plus que la matrice $\mathrm{Jac}\, F(x_0, y_0)$ est non inversible si, et seulement si, $f'(z_0) = 0$.
En déduire qu'en tout point (x_0, y_0) le rang de la matrice $\mathrm{Jac} F(x_0, y_0)$ est soit 2 soit 0.

Exercice 9 . On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ e^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en 0 et qu'elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.
2. f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Exercice 10. Ecrire les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires. En déduire que la fonction
$$g(r, \theta) = \mathrm{Log}\, r + i\theta$$
est holomorphe sur $]0, +\infty] \times]-\pi, \pi[$. (On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ on a $\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\, r + i\theta$ avec $r = |z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}\, z$).

Exercice 11 . Trouver tous les points de $\mathbb{C}$ où les fonctions suivantes sont dérivables au sens complexe.

$$\overline{z} \qquad \mathrm{Re}\, z \qquad |z|^2 \qquad z\mathrm{Re}\, z \qquad x^2y^2(z = x+iy) \qquad x^2+iy^2$$

Exercice 12 . Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable en z_0. On pose

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy) \qquad \text{et} \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy)$$

où $z = x+iy$. On pose $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$. Démontrer les formules suivantes

1. $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.
2. $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$.
3. $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$.
4. $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.
5. $f'(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = 2i\frac{\partial v}{\partial z}$.

Exercice 13 . Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Montrer que la fonction $\overline{f}$ est holomorphe si, et seulement si, f est constante.
2. On suppose qu'il existe des réels A, B, C non tous nuls, tels que

$$A\mathrm{Re}\, f(z) + B\mathrm{Im}\, f(z) + C = 0$$

pour tout $z \in U$. Montrer que f est constante.

Que se passe-t-il pour les questions (1) et (2) si l'ouvert U n'est plus connexe ?