Université Paris 7 — Année 2009/2010
Fonctions analytiques — Licence S5, M23040

Feuille 1

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - (4-1)z^2 + (7-4i)z - 4 + 3i = 0$$

sachant qu'elle admet une racine réelle.

Exercice 2.

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^7 + 1 = 0$.

Exercice 3. Dans cet exercice, $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la fonction dfinie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on appelle $C(z_0, R)$ le cercle euclidien de centre z_0 et de rayon R. Enfin, soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $L(a,b)$ la droite d'quation

$$L(a,b) = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid az + \overline{a}\,\overline{z} = b \Big\}.$$

On posera aussi $\widehat{L}(a,b) = L(a,b) \cup \{\infty\}$ et nous appellerons $\widehat{L}(a,b)$ une *droite complétée*.

1. Montrer que si $0 \notin C(z_0, R)$ on a
$$f(C(z_0,R)) = C\left(\frac{\overline{z}_0}{|z_0|^2 - R^2} \,, \left| \frac{R}{|z_0|^2 - R^2} \right| \right).$$
2. Montrer que si $0 \in C(z_0, R)$ on a $f(C(z_0,R)) = \widehat{L}(z_0, 1)$.
3. Montrer que si $0 \notin L(a,b)$ on a d'une part $b \neq 0$ et par la suite $f(\widehat{L}(a,b)) = C\Big(\dfrac{a}{b}, \Big|\dfrac{a}{b}\Big|\Big)$.
4. Montrer que si $0 \in L(a,b)$ on a $b = 0$ puis $f(\widehat{L}(a,b)) = \widehat{L}(\overline{a}, 0)$.
5. En déduire que f envoie un cercle ou une droite complétée sur un autre cercle ou une autre droite complétée.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une transformation de Möbius, c'est-à-dire une fonction du type

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sont des constantes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

1. Montrer que f envoie un cercle ou une droite complétée sur un autre cercle ou une autre droite complétée (voir les définitions dans l'exercice 3).
2. Montrer qu'il en est de même pour les fonctions $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du type

$$g(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d},$$

Exercice 5. Donner le rayon de convergence des séries entières de terme général

$$u_n(z) = \frac{\cosh n}{n} z^n \quad \text{et} \quad v_n(z) = \Big(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2}\Big)^{n^2} z^n.$$

Exercice 6. Soit A un réel positif qui n'est pas un nombre décimal. On note a_0 la partie entière de A et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note a_n le $n^{\underline{\text{me}}}$ chiffre après la virgule dans la représentation décimale de A.

Trouver le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$.

Exercice 7. On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Développer f en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Développer f en série de Taylor au voisinage de z_0 et donner le rayon de convergence.

Exercice 8. Déterminer les séries de Taylor à l'origine de $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$ et $\frac{1}{(1-z)^4}$. Donner les rayons de convergence.

Exercice 9. Montrer que dans $\mathbb{C}$ l'adhérence de toute boule ouverte $B(a, r)$, $r > 0$, est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$.

Exercice 10.

1. Soit $F = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$. Montrer que F est fermé dans $\mathbb{R}^2$ (identifé à $\mathbb{C}$).
2. Soit Ω l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les inégalités : $xy > 1$ et $x + y < 4$. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Quelle est son adhérence ?

Exercice 11. Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Montrer que A est dense si et seulement si $\mathbb{C} \setminus A$ est d'intrieur vide.

Exercice 12. Soient A et B deux parties de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, et trouver un contre–exemple l'inclusion réciproque.
3. Que se passe-t-il pour l'intérieur au lieu de l'adhérence ?

Exercice 13. Soient $x, y \in \mathbb{C}$, $x \neq y$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{C}$ et un voisinage W de y dans $\mathbb{C}$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

Exercice 14. On considère la partie de $\mathbb{C}$ suivante :

$$A = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 1 < |x| \leq 2 \text{ et } 1 \leq |y| < 2\}.$$

Déterminer $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

Exercice 15.

1. Montrer que l'ensemble suivant est dense dans $\mathbb{C}$:

$$A = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}.$$

2. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f : & A & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \dfrac{\sin x - \sin x \cos y}{xy^2} \end{array}$$

est prolongeable par continuité à $\mathbb{C}$. Le prolongement est-il unique ?

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction. Montrer que f est continue sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, pour toute partie A de $\mathbb{C}$ on a : $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 17 . Trouver le nombre de composantes connexes des parties suivantes de $\mathbb{C}$: $[0, 1] \times \mathbb{R}$, $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$, $([0, 1[\cup]1, 2])^2$,

$$A = \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$$

et

$$B = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } xy \neq 0\}.$$

Exercice 18 . Montrer que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \times \{0\}$ est connexe. Quel est le nombre de composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \times \{0\}$?

Exercice 19. Soient A et B deux parties connexes de $\mathbb{C}$.

1. On suppose $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
2. On suppose $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

Exercice 20. Soient $K \subset \mathbb{C}$ une partie compacte et F une partie fermée de K.

1. Montrer que F est une partie compacte de K et également de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si de plus F est une partie discrète alors F est finie.

Exercice 21. Soit K une partie convexe, compacte et non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne. On fixe $z_0 \in K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(z) = (1 - \frac{1}{n})f(z) + \frac{1}{n}z_0.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que f_n est une application de K dans K et admet un unique point fixe. On le note z_n.
2. Montrer que, pour tout $z \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|z - f(z)| \ \leq |z - z_n| + |f_n(z_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - f(z)|.$$

3. Montrer que $|f_n(z_n) - f(z_n)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4. En déduire que f admet un point fixe (non nécessairement unique).

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application contractante (k-lipschitzienne avec $k < 1$).

1. Soient a et b des points fixes de f. Montrer que $a = b$.
2. Soit $z_0 \in X$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $z_{n+1} = f(z_n)$. Montrer que la suite (z_n) est de Cauchy.
3. En déduire que f admet un unique point fixe.