Travaux Dirigés – Exercices. Série V

Semaine VII-VIII-IX. 12/11/07 – 21/11/07

A– Le A-module $A[X]$

Soit A un anneau commutatif intègre.

1. Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ muni de l'action $A \times A[X] \to A[X]$ qui à (a, P) associe aP est un A-module.
2. Soit n un entier ≥ 0. Montrer que l'ensemble $A[X]_n$ de polynômes de $A[X]$ nuls ou de degré $< n$ est un A-module libre de rang n.
3. Soit $P \in A[X]$ un polynôme de degré n. Montrer que $(P) = PA[X]$ est un A-module. Le A module quotient $A[X]/(P)$ est-il libre ? (On pourra considérer $A = \mathbf{Z}$ et le polynôme constant égal à 2). Qu'en est-il si P est unitaire ?

B– Un espace vectoriel muni d'une application linéaire définit un $K[X]$-module

Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E.

1. Rappeler comment u fait de E un $K[X]$-module.
2. Montrer que si E est de dimension finie comme K espace vectoriel, E est de type fini comme $K[X]$-module. Notons alors $\mu(X)$ le polynôme minimal de u. Montrer que E est un $K[X]/(\mu(X))$-module et que c'est un $K[X]$-module de torsion.
3. Posons $E = K[T]$. Considérons le cas où u est la multiplication par T. Montrer que E est un $K[X]$-module libre.
4. Posons $E = K[T]$. Considérons le cas où u est la dérivation dans $K[T]$. Montrer que E n'est pas de type fini comme $K[X]$-module (on pourra montrer que, si c'était le cas, il existerait des polynômes $P_1, \ldots, P_r \in K[T]$ tels que tout élément de $K[T]$ soit combinaison K-linéaire des dérivées successives de $P_1, \ldots, P_r$). Montrer que tout élément de E est de torsion.
5. Qu'est ce que c'est qu'un $\mathbb{K}[X]/(X^n)$-module ?
6. Qu'est ce que c'est qu'un $\mathbb{K}[X, Y]$-module ?
7. On considère l'anneau $T(2, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures d'ordre deux. Montrer que la donnée d'un $T(2, \mathbb{K})$-module M est équivalente à la donnée d'une application linéaire $f : E_1 \to E_2$. (On écrira $M = E_1 \oplus E_2$ en pensant à l'action des deux idempotents E_{11} et E_{22} de $T(2, \mathbb{K})$.)

C– Un groupe opérant sur un ensemble définit un module

Soit E un ensemble fini. On rappelle que $\mathbf{Z}[E] = \{n : E \to \mathbf{Z}\}$ est muni d'une structure de groupe abélien par $(n_1 + n_2)(x) = n_1(x) + n_2(x)$. On pourra noter $\sum_{x \in E} n(x)[x]$ l'élément n de $\mathbf{Z}[E]$. Ainsi, pour $x_0 \in E$, on notera $[x_0]$ la fonction $n_{x_0} : E \to \mathbf{Z}$ donnée par $n_{x_0}(x) = 0$ si $x \neq x_0$ et $n_{x_0}(x_0) = 1$.

Soit G un groupe fini opérant sur E par la loi $(g, x) \mapsto g.x$. On rappelle que $\mathbf{Z}[G] = \{f : G \to \mathbf{Z}\}$ est muni d'une structure d'anneau par $(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$ et $(f_1 f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$. On pourra noter l'élément $f \in \mathbf{Z}[G]$ par $\sum_{g \in G} f(g)[g]$.

1. Considérons l'application $\mathbf{Z}[G]\times\mathbf{Z}[E] \to \mathbf{Z}[E]$ qui associe à $\sum_{g\in G} f(g)[g], \sum_{x\in E} n(x)[x])$ l'élément $\sum_{g\in G}\sum_{x\in E} f(g)n(x)[g$
   Montrer que cette loi associe à $([g],[x])$ l'élément $[g.x]$ $(g \in G,\ x \in E)$.
2. Montrer que cette loi fait de $\mathbf{Z}[E]$ un $\mathbf{Z}[G]$-module. (Elle étend l'action de G sur E par linéarité.)
3. Soit Y un sous-ensemble de E stable par l'action de G. Montrer que $\mathbf{Z}[Y]$ est un sous-module de $\mathbf{Z}[E]$.
4. Soient E_1, E_2... E_n les orbites de E sous G. Montrer que $\mathbf{Z}[E]$ est somme directe des sous-modules $\mathbf{Z}[E_1]$, $\mathbf{Z}[E_2]$ ....$\mathbf{Z}[E_n]$.
5. Montrer que $\mathbf{Z}\sum_{x\in E}[x]$ est un sous-module de $\mathbf{Z}[E]$.
6. Montrer que $\mathbf{Z}[E]^0 = \{n \in \mathbf{Z}[E]/\sum_{x\in X} n(x) = 0\}$ est un sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de $\mathbf{Z}[E]$. Quelle est son intersection avec $\mathbf{Z}\sum_{x\in E}[x]$? Est-ce une somme directe ?

D– Anneaux non noethériens.

1. Soit K un corps. Montrer que l'anneau de polynômes en une infinité d'indéterminées $A = K[(X_i)_{i\in\mathbf{N}}]$ n'est pas noethérien.
2. Montrer que A est un A-module de type fini non noethérien.

E– Module de torsion qui n'est pas de type fini

1. Montrer que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module de torsion.
2. Soient x_1,..., $x_n \in \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbf{Q}$ tel que $y \notin \mathbf{Z}x_1 + ... + \mathbf{Z}x_n$. En déduire que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ n'est pas de type fini.

F– Module dual

Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules.

1. Posons $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ l'ensemble des homomorphismes de A-modules de M vers N. Montrer comment il est muni d'une structure de A-module.
2. Le A-module $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$ s'appelle le *module dual* de M. Montrer que si M est libre de rang n, il en est de même de $\mathrm{Hom}_A(M,A)$.
3. Quel est le dual du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
4. Montrer qu'on a un homomorphisme de A-modules $M \to (M^*)^*$ donné par $m \mapsto (\phi \mapsto \phi(m))$. Montrer que c'est un isomorphisme lorsque M est libre de rang fini. Est-ce un isomorphisme lorsque $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
5. Montrer qu'un homomorphisme de A-modules $f : M \to N$ donne lieu à un homomorphisme (dit *dual*) $f^* : N^* \to M^*$. Montrer que si f est injective, f^* est surjective.
6. Montrer que les modules M et M^* sont isomorphes si et seulement si il existe sur M une forme bilinéaire non dégénérée conservée par les éléments de A, en un sens que l'on précisera. (Une application importante de cette idée est donnée en la partie P.)

G– Propriétés des modules quotients

Soit A un anneau. Soient M et N deux A-modules. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme surjectif de A-modules. Notons L le noyau de f.

1. Donner un exemple où M et L sont libres sans que N soit libre.
2. Montrer que si L et N sont libres, M est libre. Quel est le rang de M ?
3. Donner un exemple où M est libre sans que L soit libre. (On pourra penser à $A = M = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.)
4. Supposons que $M = A^2$ et $N = A$. Montrer que le noyau de f est libre.
5. Lorsque M est libre et L est de type fini, on dit que N est de *présentation finie*. Montrer que tout module de type fini sur un anneau principal est de présentation finie.
6. Soit K un corps. Supposons que $A = K[(X_i)_{i\in\mathbf{N}}]$. Considérons l'idéal I de A engendré par $\{X_1, X_2, ...\}$. Montrer que l'anneau-quotient A/I est isomorphe à K, ce qui fait de K un A-module. Montrer que K est de type fini comme A-module, mais pas de présentation finie.

H– Suites exactes

Soit A un anneau. Soient M_0, $...M_n$ des A-modules. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, soit $f_i : M_{i-1} \to M_i$ un homomorphisme de A-modules. Si $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$ $(1 \leq i < n)$ et si f_1 est injective et f_n est surjective, on dit qu'on a une *suite exacte* et on écrit

$$0 \to M_0 \to M_1 .... \to M_n \to 0.$$

C'est la situation dans laquelle nous nous plaçons.

1. Montrer que si A est un corps et M_i est un espace vectoriel de dimension finie d_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = 0$. Montrer qu'il en est de même si A est principal et si M_i est libre de rang d_i comme A-module.
2. Montrer que si $A = \mathbf{Z}$ et M_i est un groupe abélien fini d'ordre t_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$.
3. Supposons que $A = \mathbf{Z}$ et $M_i = T_i \oplus N_i$, avec T_i fini d'ordre t_i et N_i libre de rang d_i, a-t-on $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = 0$ et $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$? (On pourra examiner le cas où $n = 2$, $M_0 = M_1 = \mathbf{Z}$, f_1 est la multiplication par 2 et f_2 est la surjection canonique $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.)

J– Sous-module supplémentaire

1. Le sous-$\mathbf{Z}$-module $2\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$ admet-il un supplémentaire ?
2. Tout sous-module libre d'un module libre admet-il un supplémentaire ?
3. Si N est un sous-module de M tel que M/N soit libre montrer que N admet un supplémentaire dans M.

K– Invariants de $K[X]$-modules

Donner les invariants des $K[X]$-modules suivants issus d'un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel E.

1. Le cas où $K = \mathbf{R}$ et u est une rotation d'angle θ du plan euclidien $E = \mathbf{R}^2$.
2. Le cas où $E = K[X]/(P)$, avec $P \in K[X]$, $P \neq 0$, et u est la multiplication par X.

3. Le cas où $E = K^n$ et u est donné par l'expression, dans la base canonique $(e_1, ..., e_n)$, $u(e_i) = e_1 + e_2 + ... + e_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

M- Tout module est quotient d'un module libre

Soit M un A-module. Considérons le A-module $A[M]$ de base indexée par les éléments de M. C'est un A-module libre. On note $[m]$ l'élément de $A[M]$ associé à $m \in M$.

Considérons le sous-A-module N de $A[M]$ engendré par les éléments $[m+n] - [m] - [n]$, $a[m] - [a.m]$ $(m,\, n \in 0,\, a \in A)$.

Montrer que M est isomorphe au quotient M/N.

N- Suites exactes courtes, modules projectifs

Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module.

Soit $f : M \to N$ un homomorphisme surjectif de A-modules de noyau L. On résume cette situation par la *suite exacte courte*

$$0 \to L \to M \to N \to 0,$$

où la première et la dernière applications sont l'application nulle, la deuxième application est l'injection, la troisième application est f. Bien entendu, le A-module N est isomorphe au quotient M/L.

On dit que cette suite exacte courte est *scindable* s'il existe un sous-A-module N_0 de N tel que la restriction de f à N_0 induit un isomorphisme $N_0 \to N$. On dit alors que L est un *facteur direct* de M.

Si le A-module N est tel que toute suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ est scindable, on dit que N est un *A-module projectif.*

1. Montrer que la suite exacte courte ci-dessus est scindable si et seulement si L admet un A-module supplémentaire dans M.
2. Montrer que tout A-module libre est projectif.
3. Supposons A intègre. Montrer que tout A-module projectif est sans torsion.
4. Supposons A principal et M de type fini comme A-module. Montrer que tout A-module projectif est libre.
5. Supposons que N soit un facteur direct d'un module libre M_0. Montrer que N est projectif.
6. En utilisant que tout module est quotient d'un module libre, montrer que tout module projectif est facteur direct d'un module libre.
7. Supposons que $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et que $M = \mathbb{Z} \times \{0\}$, vu comme sous-$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que M n'est pas libre et que M est projectif.

O- Modules irréductibles

Soit A un anneau. Soit M un A-module. Il est dit *irréductible* si M est non réduit à $\{0\}$ et ne possède pour seuls sous-modules que $\{0\}$ et M lui-même.

1. Montrer que A est un A-module irréductible si et seulement si A est un corps.

2. Montrer que les $\mathbb{Z}$-modules irréductibles coïncident avec les groupes finis d'ordre premier.

3. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer que les $\mathbb{K}[X]$-modules irréductibles sont isomorphes à $\mathbb{K}[X]/(P)$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductble.

4. Soit n un entier > 0. Montrer que $\mathbb{K}^n$ est un $M(n,\mathbb{K})$-module irréductible. On l'appelle le module tautologique.

5. Montrer que $M(n,\mathbb{K})$-module à gauche $M(n,\mathbb{K})$ est somme de n copies du module tautologique, soit

$$M(n,\mathbb{K}) = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

En déduire que le module tautologique est, à isomorphisme près, le seul module irréductible de $M(n,\mathbb{K})$. Si M est un tel module, on pourra écrire à cet effet $Hom_{M(n,\mathbb{K})}(M(n,\mathbb{K}), M) \simeq M \neq \{0\}$. On en déduira que $Hom_{M(n,\mathbb{K})}(I_k, M) \neq \{0\}$ pour un certain k, et on appliquera alors le lemme de Schur.

6. En déduire que les automorphismes de l'algèbre $M(n,\mathbb{K})$ sont tous intérieurs. (Si Φ est un automorphisme de $M(n,\mathbb{K})$, on montrera que l'action $M \cdot v = \Phi(M)(v)$ fait de $\mathbb{K}^n$ un $M(n,\mathbb{K})$-module irréductible.)

7. Montrer que les idéaux à gauche de $M(n,\mathbb{K})$ sont tous principaux. (Si J est un tel idéal, on lui trouvera un idéal supplémentaire en empruntant quelques I_k éventuels dans la somme directe apparaissant dans la question 5. Il est facile alors de démontrer que si un anneau s'écrit comme somme *directe* de deux idéaux, soit $A = I \oplus J$, ces idéaux sont principaux et engendrés par des idempotents.)

P- Produit tensoriel

Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules. Considérons le A-module $A[M \times N]$ formé par les fonctions $M \times N \to A$ qui sont à support fini. Pour $(m,n) \in M \times N$, on note $[m,n] \in A[M \times N]$ l'élément qui prend la valeur 1 en (m,n) et 0 ailleurs.

1. Montrer que $A[M \times N]$ admet pour base $([m,n])_{(m,n)\in M\times N}$.

2. Considérons le sous-module T de $A[M \times N]$ engendré par les éléments de la forme $[m, n_1 + n_2] - [m,n_1] - [m,n_2]$, $[m_1 + m_2, n] - [m_1, n] - [m_2, n]$, $[am, n] - a[m,n]$, $[m, an] - a[m,n]$ (m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$, $a \in A$). On note $M \otimes_A N$ le A-module quotient $A[M \times N]/T$. C'est le *produit tensoriel de M et N au dessus de A*. On note $m \otimes n$ l'image de $[m,n]$ dans $M \otimes_A N$. Montrer qu'on a $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$, $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$, $(am) \otimes n = a(m \otimes n) = m \otimes (an)$ (m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$, $a \in A$)

3. Supposons que A soit un corps. Montrer que si $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_m)$ sont des bases de M et N respectivement, $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}}$ est une base de $M \otimes_A N$. Quelle est alors la dimension de $M \otimes_A N$ en fonction des dimensions de M et N ?

4. Montrer qu'il existe parfois des éléments dans $M \otimes_A N$ qui ne s'écrivent pas sous la forme $m \otimes n$ avec $m \in M$, $n \in N$. (On pourra prendre par exemple le cas où A est un corps et $M = N = A^2$.)

5. Montrer qu'on a un homomorphisme de A-module $M \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M^*, N)$ qui à $x \otimes y$ associe l'application qui à $\phi \in M^*$ associe $\phi(x)y$.

Q- Idéaux à droite de $\mathrm{M}_n(K)$

Soit K un corps commutatif. Soit n un entier > 0. Soit I un idéal à droite de l'anneau $M_n(K)$. On rappelle que K^n est un $M_n(K)$-module à gauche.

1. Considérons les ensembles $E = IK^n$ et $F = \cap_{i \in I} \mathrm{Ker}(i)$. Montrer que ce sont des sous-$M_n(K)$-modules de K^n, et donc des sous-K-espaces vectoriels de K^n.
2. Soit e la projection de K^n sur E parallèlement à F. Montrer que $I = eM_n(K)$.
3. Montrer que les $M_n(K)$-modules $eM_n(K)$ et $(1-e)M_n(K)$ sont en somme directe.
4. En déduire que I est $M_n(K)$-module projectif

R- Les cellules maximales d'un endomorphisme nilpotent

Introduire une notion "duale" à celle de module projectif, en l'occurence celle de module injectif. En particulier, un tel module admet un module supplémentaire dans tout module dans lequel il est plongé. Montrer que si un module est projectif, son dual est injectif.

La réduction de Jordan a besoin d'un passage crucial : démontrer qu'une cellule $[v, N(v), \ldots, N^{n-1}(v)]$ de longueur n pour une matrice nilpotente N d'indice de nilpotence n admet un supplémentaire stable par N. L'idée est de remarquer que le A-module A, où A est l'anneau quotient $A = \mathbb{K}[X]/(X^n)$ est injectif, car isomorphe au dual d'un module libre, en l'occurrence lui-même. Une dualité non dégénérée est donnée par $(\bar{P}, \bar{Q}) \mapsto c_{n-1}(PQ)$, où $c_{n-1}(L)$ désigne le coefficient de degré X^{n-1} du polynôme L (la matrice de cette forme quadratique dans la base canonique de A est la matrice counité).