Travaux Dirigés – Exercices. Série III

Semaine III. 01/10/07 – 05/10/07

A– Un exercice facile.

Soit $P(X)$ un polynôme de $A[X]$, où A est un anneau commutatif. Montrer de deux manières que le polynôme $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$. Passer au quotient modulo l'idéal principal engendré par $P(X) - X$, ou bien écrire $P(P(X) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X$ et penser au fait que $P(Y) - P(X)$ est divisible par $Y - X$.

B– $\mathbb{K}$-algèbres intègres et de dimension finie Montrer qu'une telle algèbre est un corps.

C– Les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}[X]$ ne sont pas principaux.

Soit (f) un idéal principal non nul de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

1. On suppose que $f \in \mathbb{Z}$. Quel sont le noyau et l'image de l'homomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})[X]$? En déduire que l'idéal (f) de $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas maximal. Est-il premier ?
2. On suppose maintenant que $\deg(f) \geq 1$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que l'image $\bar{f}$ de f par le morphisme naturel $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ soit de degré ≥ 1. Pour un tel p, on appelle ψ_p l'homomorphisme composé $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X] \to (\mathbb{F}_p[X])/(\bar{f})$, qui est surjectif et non nul. Démontrer que l'idéal $\mathrm{Ker}\,\psi_p$ contient strictement l'idéal principal (f). (Penser au nombre p.)
3. En déduire qu'un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$ ne peut être principal.
4. L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est donc pas principal, d'après le théorème de Zorn (ou de Krull). Peut-on éviter l'axiome du choix ? (Penser à l'idéal $(2, X)$.)

D– Spectre premier de $\mathbb{Z}[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'idéal (p, P) de $\mathbb{Z}[X]$, où p est un nombre premier et $P \in \mathbb{Z}[X]$, soit maximal.
2. Quels sont les irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$? On notera que 3 est irréductible et que $X^2 + 1$ l'est aussi, mais que $2X^2 + 2$ ne l'est pas. Montrer que ce dernier polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Rappeler la définition d'un élément irréductible dans un anneau commutatif A. Montrer que l'idéal engendré par un élément irréductible est premier. Réciproque. Le polynôme $X^4 + 1$ est-il irréductible sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{Q}$, sur $\mathbb{Z}$.
4. On suppose que l'idéal monogène (f) de $\mathbb{Z}$ est premier. Discuter suivant que f est de degré strictement positif ou non de l'intersection $(f) \cap \mathbb{Z}$. On suppose que l'idéal (p, P) est maximal. Quelle est son intersection avec $\mathbb{Z}$?
5. On se propose de démontrer dans la suite que le spectre premier de $\mathbb{Z}[X]$ est formé de trois familles d'idéaux premiers. La première famille est réduite au singleton formé par l'idéal nul. La deuxième famille est formée des idéaux premiers principaux, c'est-à-dire engendrés par un entier premier p, ou par un polynôme P primitif et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, et la troisième famille formée des idéaux maximaux, donc forcément non principaux, qui sont de la forme (p, P), où P est un relèvement d'un irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$. La méthode consiste, pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Z}[X]$, à examiner l'idéal premier $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.

(a) On commence par le cas où l'idéal $\mathfrak{p}$ est non nul et $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. On s'attend à ce que cet idéal soit engendré par un polynôme primitif irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Soit $\pi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p}$ la surjection canonique. On note K le corps des fractions de $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p}$. Montrer que K est de caractéristique nulle, et de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. On montrera en fait que c'est un quotient de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ par l'idéal engendré par un polynôme f irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Commencer par localiser à cette fin $\mathbb{Z}[X]$ par rapport à la partie stable $S = \mathbb{Z} - \{0\}$. Que trouve-t-on ? Montrer ensuite que ce localisé s'applique par un morphimse φ sur un sous-algèbre de B. Écrire la suite exacte courte associée à φ. Montrer que l'image est un corps et que le noyau est le localisé $S^{-1}\mathfrak{p}$. En déduire alors que l'image est K. Mettre alors un évidence le polynôme irréductible f de $\mathbb{Z}[X]$ et montrer que $f \in \mathfrak{p}$. Montrer alors que $\mathfrak{p} = (f)$.

(b) On suppose maintenant que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$, soit $p\mathbb{Z}$. Montrer que le quotient $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p}$ est une image directe de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que $\mathfrak{p}$ est soit égal à (p) soit engendré par p et un P tel que l'image de P dans $\mathbb{F}_p[X]$ est irréductible.

(c) Conclure.

E– Pfaffien d'une matrice antisymétrique.

1. Soit $A \in M(n, \mathbb{K})$ une matrice antisymétrique à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. montrer qu'il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{K})$ telle que $PA{}^tP$ soit diagonale en blocs avec des blocs nuls ou de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. En déduire que le déterminant de A est un carré dans K.
3. Montrer alors que le déterminant de la matrice antisymétrique générale en les $n(n-1)/2$ indéterminées X_{ij} est le carré d'un polynôme en les X_{ij}, unique au signe près. On fixera l'un des deux et on l'appellera le polynôme pfaffien $Pf(X_{ij})$.
4. Donner l'expression du Pfaffien pour la matrice antisymétrique générale 4×4.
5. On parlera de $Pf(A)$ en spécialisant les indéterminées en les coefficients de la matrice antisymétrique A.
6. Montrer que $Pf(PA{}^tP = Pf(A)\det(P)$. en déduire que le groupe symplectique est contenu dans $SL(2n, \mathbb{K})$.

F– Un anneau non factoriel.

Posons $A = \{a + ib\sqrt{5} \in \mathbb{C} / a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que c'est un anneau.
2. Montrer que l'application $A \to \mathbb{R}$ qui à z associe $z\bar{z}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et multiplicative.
3. Déterminer A^*.
4. Montrer que les éléments 2, 3, $1 + i\sqrt{5}$, $1 - \sqrt{5}$ sont irréductibles dans A.
5. Montrer que 6 admet deux décompositions en produits d'irréductibles. L'anneau A est-il factoriel ?

G– La trigonométrie d'un point de vue algébrique

Posons $P = X^2 + Y^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X, Y]$. Notons A l'anneau quotient $\mathbb{R}[X, Y]/(P)$ et $B = \mathbb{R}[X]$. Notons x et y les classes respectives de X et Y dans A.

1. Soit $F \in \mathbb{R}[X, Y]$. Montrer qu'il existe un unique $(Q, R_1, R_2) \in \mathbb{R}[X, Y] \times \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que $F = QP + R_1Y + R_2$.
2. Montrer qu'on a un homomorphisme injectif d'anneaux $\mathbb{R}[X] \to A$ qui à F associe $F(x)$.
3. Montrer que A est un $\mathbb{R}[X]$-module de base $(1, y)$ (*i.e.* tout élément de A s'écrit de façon unique comme combinaison $\mathbb{R}[X]$ linéaire de 1 et y).

4. Soient a, $b \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer, dans cette base, la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$-modules qui à $F \in A$ associe $(a+by)F$. Calculer le déterminant de cette matrice.
5. Montrer que, si $(a,b) \neq (0,0)$ ce déterminant est non nul. En déduire que l'anneau A est intègre, que ce n'est pas un corps, puis que P est irréductible dans $\mathbb{R}[X,Y]$.
6. Déterminer A^*.
7. Montrer que y est irréductible dans A.
8. Montrer que les anneaux $A/(y)$ et $\mathbb{R}[X]/(X^2-1)$ sont isomorphes.
9. Ces anneaux sont-ils intègres ?
10. Monter que A n'est pas factoriel.
11. Le sous-anneau de l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ engendré par les fonctions sinus et cosinus est-il factoriel ?

H– Caractérisation des anneaux euclidiens

Soit A un anneau intègre et commutatif. Considérons la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de sous-ensembles de A donnée par $A_0 = \{0\}$ et la récurrence $A_{n+1} = A_n \cup \{x \in A, A = Ax + A_n\}$.

1. Déterminer A_1.
2. Lorsque $A = \mathbf{Z}$, déterminer A_2, A_3.
3. Montrer que l'anneau A est euclidien si et seulement si $A = \cup_{n\geq 0} A_n$.
4. Supposons A euclidien. Montrer qu'il existe $x \in A - A^*$ tel que la restriction à $A^* \cup \{0\}$ surjection canonique soit surjective. En déduire que A/Ax est un corps.

I– Un anneau principal non euclidien

Posons $\alpha = (1+i\sqrt{19})/2 \in \mathbb{C}$. Considérons $A = \mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \in \mathbb{C}/a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que c'est un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
2. Déterminer A^*.
3. Montrer que le polynôme $X^2 - X + 5$ est irréductible sur les corps $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$.
4. En déduire que A n'est pas euclidien en utilisant le critère de l'exercice H.
5. Soient a et b deux éléments non nuls de A. Montrer qu'il existe q, $r \in A$ tels que $a = bq + r$ ou $2a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$ (où $N(z)$ désigne la norme d'un nombre complexe z). Pour cela on pourra écrire $a/b = u + v\alpha$ avec u, $v \in \mathbb{Q}$ et considérer les entiers s et t les plus proches de u et v respectivement ; dans le cas où $|t - v| \leq 1/3$ on poseraq $q = s + t\alpha$, sinon on étudie la division de $2a$ par b par le même procédé.)
6. Montrer que l'idéal principal engendré par 2 est maximal.
7. Soit I un idéal de A. Soit $b \in I$ tel que $N(b)$ soit minimal parmi les normes des éléments non nuls de A. Montrer qu'on a les inclusions $2I \subset bA \subset I$, puis que I est principal.