Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Topologie algébrique – Année 2014-15

Feuille 9

Algèbre homologique

Remarque : On peut appeler *complexe de chaines* (ou parfois *complexe*) ce qu'on appelle dans le cours *module gradué différentiel*. Il est courant de noter $P_\bullet$ pour le module gradué différentiel $\oplus_{i\in\mathbf{Z}}P_i$.

1. Soit Λ un anneau commutatif. Soit M un Λ-module.
1.a. Supposons M projectif. Montrer que M est un Λ-module libre, lorsque Λ est un anneau principal.
1.b. Montrer qu'il existe un Λ-module différentiel gradué $P = (P_i)_{i\geq 0}$, avec P_i projectif ($i \geq 0$) et un morphisme $P_0 \to M$ qui donne lieu à une suite exacte de Λ-modules : $... \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$. C'est une *résolution projective de M*.
1.c. Quel est le lien entre l'homologie de P et l'homologie du complexe $... \to 0 \to M \to 0 \to ...$?
1.d. S'il existe une résolution projective $P = (P_i)_{i\geq 0}$ de M et d telle que $P_i = 0$ pour $i > d$ on dit que M est de *dimension projective finie*. Le plus petit entier d vérifiant cette propriété s'appelle la *dimension projective* de M. Déterminer la dimension projective d'un groupe abélien ($\mathbf{Z}$-module) fini non nul.
1.e. Montrer que tout module sur un anneau principal est de dimension projective ≤ 1.
1.f. Soient P et P' des résolutions projectives de deux Λ-modules M et M'. Notons π_0 et π'_0 les morphismes $P_0 \to M$ et $P'_0 \to M$. Soit $f : M \to M'$ un morphisme de Λ-modules. En déduire un morphisme $F = (f_i)_{i\geq 0}$ de Λ-modules gradués $P \to P'$ tel que $\pi'_0 \circ f_0 = f_0 \circ \pi_0$. Montrer que F est unique à homotopie près.
1.g. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de Λ-modules. Supposons qu'on dispose de résolutions projectives P' et P'' respectivement de M' et M'', montrer qu'il existe une résolution projective P de M, avec $P_i = P'_i \oplus P''_i$.
1.h. Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de Λ-modules. Supposons qu'on dispose de résolutions projectives P' et P respectivement de M' et M, montrer qu'il existe une résolution projective P'' de M''.

2. Soit Λ un anneau commutatif. Soit Q un Λ-module. On dit que Q est un *module injectif* si pour tout morphisme $f : N \to Q$ et tout morphisme injectif $g : N \to L$ il existe un morphisme $h : L \to Q$ tel que $f = h \circ g$. (On obtient une définition purement catégorique en remplaçant “morphisme injectif” par “monomorphisme”. C'est la condition duale de celle qui définit les modules projectifs. En effet on retrouve cette dernière en inversant le sens des flèches et en remplaçant “monomorphisme” par “épimorphisme”.)
2.a. Montrer que cela revient à dire que toute suite exacte $0 \to Q \to M \to N \to 0$ est scindée.
2.b. Montrer que cela revient encore à dire que si Q est un sous-module d'un Λ-module M, Q admet un supplémentaire dans M.
2.c. Montrer que cela revient encore à dire que le foncteur de la catégorie des Λ-modules vers la catégorie des groupes abéliens qui à M associe $\mathrm{Hom}(M, Q)$ est exact.
2.d. Montrer que $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ sont des $\mathbf{Z}$-modules injectifs, mais que $\mathbf{Z}$ lui-même ne l'est pas.
2.e. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ n'est pas un $\mathbf{Z}$-module injectif, mais est un $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-module injectif.
2.f. Montrer que tout espace vectoriel est un module injectif.
2.g. Montrer qu'une somme directe, ou même un produit, de modules injectifs est injectif.
2.i. Montrer qu'un module Q sur $\mathbf{Z}$ (ou même sur un anneau principal Λ) est injectif si et seulement si il est *divisible* (*i.e.* pour tout $x \in Q$ et tout $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, il existe $y \in M$ tel que $\lambda y = x$).
2.j. Une *résolution injective* d'un Λ-module M est un Λ-module différentiel gradué $(I^i)_{i\geq 0}$, avec un morphisme $M \to I_0$ tel que la suite $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to ...$ est exacte.

3. Soit G un groupe fini cyclique d'ordre n. Considérons l'anneau en groupe $\mathbf{Z}[G]$. A priori, $\mathbf{Z}[G]$ est le $\mathbf{Z}$-module libre de base G. On note ses éléments sous la forme $\sum_{g\in G}\lambda_g[g]$, avec $\lambda_g \in \mathbf{Z}$. On le munit d'une multiplication par la loi $[g].[h] = [gh]$ (g, $h \in G$). Ce n'est pas un anneau intègre, sauf si $n = 1$. Soit M un $\mathbf{Z}[G]$-module (on peut aussi dire G-module). On considérera $\mathbf{Z}$ comme un G-module pour l'action triviale. Soit g un générateur de G. Posons $D = [g] - [1]$ et $N = [1] + [g] + [g^2] + ... + [g^{n-1}]$ dans $\mathbf{Z}[G]$.

Remarque : les groupes d'homologie définis ci-dessous existent même lorsque G n'est pas cyclique, ni même commutatif. Leur définition est plus compliquée. Mais ils vérifient alors les propriétés 3.i, 3.j et 3.k.
3.a. Montrer que $ND = DN = 0$. (Donc $\mathbf{Z}[G]$ n'est pas intègre, sauf si $n = 1$.)
3.b. Montrer que les multiplication par N et D sont des morphismes de G-modules.
3.c. Montrer qu'on a un morphisme ϵ de G-modules $\mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$ qui à $[g]$ associe 1 (c'est le morphisme dit d'*augmentation*). Montrer que son noyau I_G est l'idéal engendré par D (l'*idéal d'augmentation*) qui ne dépend donc pas du choix de g.
3.d. En déduire une résolution de $\mathbf{Z}$ par des G-modules libres donnée par ... $\to \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z} \to 0$. (On précisera les flèches construites à partir de N, D et ϵ.)
3.e. Soit M un G-module. On en déduit un complexe de G-modules. $... \to M \to M \to M \to M \otimes_{\mathbf{Z}[G]} \mathbf{Z}$, dont on note $\mathrm{H}_i(G, M)$ le i-ème groupe d'homologie. Montrer qu'on a $\mathrm{H}_i(G, M) = \mathrm{H}_{i+2}(G, M)$, si i est un entier ≥ 1.
3.f. Les éléments D et N définissent des endomorphismes de G-modules sur M. Montrer qu'on a $\mathrm{H}_0(G, M) = M/DM$, $\mathrm{H}_1(G, M) = \mathrm{Ker}(D)/\mathrm{Im}(N)$ et $\mathrm{H}_2(G, M) = \mathrm{Ker}(N)/\mathrm{Im}(D)$.
3.g. Montrer que ces groupes sont de n-torsion (c'est-à-dire, on a $n.x = 0$ pour tout x).
3.h. Calculer ces groupes lorsque $M = \mathbf{Z}$.
3.i. Montrer que $M \mapsto \mathrm{H}_i(G, M)$ est un foncteur de la catégorie des G-modules dans la catégorie des groupes abéliens.
3.j. Montrer que toute suite exacte courte de G-modules $0 \to L \to M \to N \to 0$ donne lieu à une suite exacte longue d'homologie $... \to \mathrm{H}_i(G, L) \to \mathrm{H}_i(G, M) \to \mathrm{H}_i(G, N) \to \mathrm{H}_{i-1}(G, M) \to ... \to \mathrm{H}_0(G, L) \to \mathrm{H}_0(G, M) \to \mathrm{H}_0(G, N) \to 0$.
3.k. Montrer que $H \mapsto \mathrm{H}_i(H, M)$ est un foncteur de la catégorie des sous-groupes de G dans la catégorie des groupes abéliens.

Polyèdres formels

1. Soit S un ensemble fini non vide. Soit F une famille de parties de S telle que pour tout $A \in F$ et tout $B \subset A$, on a $B \in F$. Le couple (S, F) est appelé *polyèdre formel*. Soit $X = (S, F)$ un polyèdre formel. On identifie S à un sous-ensemble de $\mathbf{R}^S$ (le $\mathbf{R}$-espace vectoriel libre sur S). Pour $A \in F$, on note $|A|$ l'enveloppe convexe de A dans $\mathbf{R}^S$.

On pose $|X| = \cup_{A \in F} |A|$. C'est la *réalisation* de X. On note Δ_S la réalisation de $(S, \mathcal{P}(S))$, où $\mathcal{P}(S)$ est l'ensemble des parties de S.
1.a. Comment retrouve-t-on ainsi les polyèdres tels que le cube, le tétraèdre etc ?
1.b. Montrer que $|X|$ est compact.
1.c. Montrer que Δ_S est homéomorphe au disque $\mathbf{D}^n$, où $n + 1$ est le cardinal de S.
1.d. Montrer que l'inclusion canonique $|X| \mapsto \Delta_S$ admet une rétraction continue si $|X|$ est contractile.
1.e. Montrer que si $|X|$ est contractile, toute application continue $|X| \to |X|$ admet un point fixe.