Université Paris Diderot — Topologie algébrique – Année 2014-15
M1 mathématiques

Feuille 8

Produit tensoriel, algèbre commutative

1. Soit A un groupe abélien de type fini de rang r. Notons A_0 sa partie de torsion. Soit K un corps commutatif.
1.a. Supposons K de caractéristique 0. Montrer que $A \otimes K$ est un K-espace vectoriel de dimension r. Si A est fini à quoi est égal $A \otimes K$?
1.b. Supposons encore le corps K de caractéristique 0. Soit s l'application canonique $A \to A \otimes K$. Toute base de K est-elle l'image par s d'une famille libre de A ? Est-elle l'image par s d'un système de générateurs de A/A_0 ?
1.c. Supposons K de caractéristique $p > 0$. Montrer que $A \otimes K$ est un K-espace vectoriel de dimension $\geq r$. Montrer que cette dimension ne dépend que de p. Donner un exemple où on n'a pas égalité.
1.d. Supposons encore K de caractéristique $p > 0$. Quelle est la dimension (comme K-espace vectoriel) de $(\mathbf{Z}/2015\mathbf{Z}) \otimes K$ et de $(\mathbf{Z}/2015\mathbf{Z})^* \otimes K$, suivant la valeur de p ?
1.e. Soient C et D des groupes cycliques d'ordres c et d respectivement. Montrer que $C \otimes D$ est cyclique d'ordre $\mathrm{pgcd}(c, d)$.

2. Soit Λ un anneau commutatif. Soit Λ' une Λ-algèbre.
2.a. Soit $f : M \to N$ un morphisme de Λ-modules. Comment est défini $f \otimes 1 : M \otimes_\Lambda \Lambda' \to N \otimes_\Lambda \Lambda'$ le morphisme de Λ'-modules défini par l'extension des scalaires ? Si f est surjective, $f \otimes 1$ est-il surjectif ? Si f est injectif, $f \otimes 1$ est-il injectif ? (Penser à $M = L = \Lambda = \mathbf{Z}$ et à la multiplication par 2.)
2.b. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte courte de Λ-modules. L'extension des scalaires respecte-elle les suites exactes ?

3. Soit Λ un anneau commutatif. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte courte de Λ-modules. On dit qu'elle est *scindée* si le morphisme $M \to N$ admet une section (un inverse à gauche).
3.a. Montrer qu'alors M est isomorphe à $L \times N$.
3.b. Montrer que si Λ est un corps toute suite exacte courte est scindée. (On admet l'axiome du choix.)
3.c. Montrer que si Λ est intègre et n'est pas un corps, il existe une suite exacte de Λ-modules non scindée.

4. Soit Λ un anneau commutatif. Soient M, M_1, M_2 et N des Λ-modules. Soient $A = (\alpha_i)_{i\in I}$ et $B = (\beta_j)_{j\in J}$ des familles de M et N respectivement. Soit $A \times B = (\alpha_i \otimes \beta_j)_{(i,j)\in I\times J}$ la famille de $M \otimes_\Lambda N$ qui s'en déduit.
4.a. Supposons les familles A et B génératrices. Montrer que $A \times B$ est génératrice. En déduire que si M et N sont de type fini, $M \otimes_\Lambda N$ est de type fini.
4.b. Supposons A et B libres. Montrer que $A \times B$ est libre.

5. Soit K un corps commutatif. Soient E_1, E_2, F_1 et F_2 des K-espaces vectoriels. Soient $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ des applications K-linéaires.
5.a. Montrer qu'on a une application K linéaire $f_1 \otimes f_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ donnée par la formule $(f_1 \otimes f_2)(e_1 \otimes e_2) = f_1(e_1) \otimes f_2(e_2)$.
5.b. Supposons que f_1 et f_2 sont diagonalisables. Montrer que $f_1 \otimes f_2$ est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?
5.c. Supposons E_1, E_2, F_1 et F_2 de dimensions finies. Soit B_1, B_2, C_1 et C_2 des bases de E_1, E_2, F_1 et F_2 respectivement. Montrer que $B_1 \times B_2$ et $C_1 \times C_2$ sont des bases de $E_1 \otimes E_2$ et $F_1 \otimes F_2$. Quelles sont les dimensions de $E_1 \otimes E_2$ et $F_1 \otimes F_2$? Déterminer la matrice de $f_1 \otimes f_2$ en fonctions des matrices de f_1 et f_2.
5.d. L'endomorphisme $f_1 \otimes f_2$ peut-il être diagonalisable sans que f_1 et f_2 soient diagonalisables ?

6. Soit Λ un anneau commutatif. Soient M_1, M_2 et N des Λ-modules. Montrer que $(M_1 \oplus M_2) \otimes_\Lambda N$ s'identifie à $(M_1 \otimes_\Lambda N) \oplus (M_2 \otimes_\Lambda N)$.

7.a. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Montrer que $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, dont une base est déduite d'une base de E.

7.b. Supposons que E soit un plan euclidien orienté. Soit f une rotation de E de mesure d'angle $\pi/2$. Montrer que $f \otimes 1$ est un endomorphisme diagonalisable de $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ de valeurs propres i et $-i$.

8. Soit Λ un anneau commutatif. Soit P un Λ-module. On dit qu'il est *projectif* si et seulement si pour tout morphisme $f : P \to M$ de Λ-modules et tout morphisme surjectif $g : N \to M$ de Λ-modules, il existe un morphisme de Λ-modules $h : P \to N$ tel que $f = g \circ h$. (Remarque : il s'agit d'une caractérisation purement catégorique, si on remplace morphisme surjectif par épimorphisme.)

On dit que P est *plat* si le foncteur $\otimes P$ est exact. Autrement dit, si pour toute suite exacte de Λ-modules $0 \to A \to B \to C \to 0$ on a une suite exacte de Λ-modules $0 \to A \otimes P \to B \otimes P \to C \otimes P \to 0$.
8.a. Montrer qu'il revient au même de dire que P est projectif et que toute suite exacte courte $0 \to L \to N \to P \to 0$ est scindée.
8.b. Montrer que tout module libre est projectif.
8.c. Montrer que P est projectif si et seulement si le foncteur $A \mapsto \mathrm{Hom}(P, A)$ est exact (*i.e.* il transporte toute suite exacte de Λ-modules $0 \to A \to B \to C \to 0$ en une suite exacte $0 \to \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, C) \to 0$).
8.d. Montrer que P est projectif si et seulement si il existe un Λ-module Q tel que $L = P \oplus Q$ est un Λ-module libre. (On dit que P est un *facteur direct* de L.)
8.e. Si $\Lambda = \mathbf{Z}$, montrer que P est projectif si et seulement si il est libre.
8.f. Montrer que le module $\mathbf{Z} \times 0$ sur l'anneau $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est projectif sans être libre.
8.g. Montrer que tout module projectif est plat.
8.h. Montrer que tout module plat est sans torsion.
8.i. Montrer que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module ni projectif ni (*a fortiori*) plat.

Modules différentiels gradués

1. Soit Λ un anneau commutatif. Soit $f : M \to N$ un morphisme homogène de degré k entre Λ-modules gradués. Montrer que f est bijectif (resp. injectif, resp. surjectif) si et seulement si $f_i : M_i \to N_{i+k}$ est bijectif (resp. injectif, resp. surjectif).

2. Soit Λ un anneau commutatif. On rappele que le bord $\partial(f)$ d'un morphisme homogène f de Λ-modules gradués est donné par $\partial \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial$, où $|f|$ est le degré de f. Montrer qu'on a $\partial(g \circ f) = \partial(g) \circ f + (-1)^{|g|} g \circ \partial(f)$, où f et g sont des morphismes homogènes f de Λ-modules gradués composables.

3. Soit Λ un anneau commutatif. Soit $(M_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2}$ une famille de neuf Λ-modules. Soit $f_{i,j} : M_{i,j} \to M_{i+1,j}$ ($i = 1$ ou $i = 2$) et $g_{i,j} : M_{i,j} \to M_{i,j+1}$ des morphismes de Λ-modules. Supposons que $f_{1,j}$ et $f_{2,j}$ définissent une suite exacte courte $0 \to M_{1,j} \to M_{2,j} \to M_{3,j} \to 0$ ($1 \leq j \leq 3$). Dessiner le diagramme. On va montrer le *lemme des neuf*.
3.a. Supposons que $g_{i,1}$ et $g_{i,2}$ définissent une suite exacte courte $0 \to M_{i,1} \to M_{i,2} \to M_{i,3} \to 0$ ($2 \leq i \leq 3$). Montrer que $g_{1,1}$ et $g_{1,2}$ définissent une suite exacte courte $0 \to M_{1,1} \to M_{1,2} \to M_{1,3} \to 0$.
3.b. Supposons que $g_{i,1}$ et $g_{i,2}$ définissent une suite exacte courte $0 \to M_{i,1} \to M_{i,2} \to M_{i,3} \to 0$ ($1 \leq i \leq 2$). Montrer que $g_{3,1}$ et $g_{3,2}$ définissent une suite exacte courte $0 \to M_{3,1} \to M_{3,2} \to M_{3,3} \to 0$.

4. Soit Λ un anneau commutatif. Soient M et N deux Λ-modules gradués.
4.a. Montrer que toute équivalence d'homotopie $M \to N$ définit un quasi-isomorphisme, puis que tout Λ-module gradué homotope à 0 est d'homologie nulle.
4.b. Considérer le cas où M est concentré en degré i et $i+1$ et donné par ... $\to 0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to 0 \to$ ... (le morphisme non nul du degré i vers le degré $i+1$ est la multiplication par 2), N est concentré en degré $i+1$ et donné par ... $\to 0 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0 \to$ ... et on a un morphisme $f : M \to N$ de degré 0 et qui est la réduction modulo 2 en degré $i+1$, et 0 en les autres degrés. Montrer que f est un quasi-isomorphisme, mais que ce n'est pas une équivalence d'homotopie.
4.c. Montrer que le Λ-module gradué ... $\to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0 \to$ ... (où les morphismes non explicites sont la multiplication par 2 et la réduction modulo 2) est d'homologie nulle, sans être homotope à 0.

5.a. Soit K un corps commutatif. Montrer que $K[X]$ est un module différentiel gradué de telle sorte que la multiplication m_X par X soit un endomorphisme de degré 1.
5.b. Montrer que la dérivation d/dX par rapport à X est un morphisme de degré -1.
5.c. Calculer le morphisme de degré 0 donné par $(d/dX) \circ m_X - m_X \circ (d/dX)$.