Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Topologie algébrique – Année 2014-15

Feuille 7

Modules

1. Soit A un anneau commutatif intègre.
1.a. Montrer que $A[X]$ muni de l'action $A \times A[X] \to A[X]$ qui à (a, P) associe aP est un A-module.
1.b. Soit n un entier ≥ 0. Montrer que l'ensemble $A[X]_n$ de polynômes de $A[X]$ nuls ou de degré $< n$ est un A-module libre de rang n.
1.c. Soit $P \in A[X]$ de degré n. Montrer que $(P) = PA[X]$ est un A-module. Le A module quotient $A[X]/(P)$ est-il libre ? (On pourra considérer $A = \mathbf{Z}$ et le polynôme constant égal à 2). Qu'en est-il si P est unitaire ?

2. Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E.
2.a. Rappeler comment u fait de E un $K[X]$-module.
2.b. Montrer que si E est de dimension finie comme K-espace vectoriel, E est de type fini comme $K[X]$-module. Notons alors M le polynôme minimal de u. Montrer que E est un $K[X]/(M)$-module et que c'est un $K[X]$-module de torsion.
2.c. Posons $E = K[T]$. Lorsque u est la multiplication par T, montrer que E est un $K[X]$-module libre.
2.d. Posons $E = K[T]$. Lorsque u est la dérivation dans $K[T]$, montrer que E n'est pas de type fini comme $K[X]$-module (montrer que, si c'était le cas, il existerait $P_1, ...P_r \in K[T]$ tels que tout élément de $K[T]$ soit combinaison K-linéaire des dérivées successives de $P_1, ...P_r$.) Montrer que tout élément de E est de torsion.

3. Soit E un ensemble fini. On rappelle que $\mathbf{Z}[E] = \{n : E \to \mathbf{Z}\}$ est muni d'une structure de groupe abélien par $(n_1 + n_2)(x) = n_1(x) + n_2(x)$. On pourra noter $\sum_{x\in E} n(x)[x]$ l'élément n de $\mathbf{Z}[E]$. Ainsi, pour $x_0 \in E$, on notera $[x_0]$ la fonction $n_{x_0} : E \to \mathbf{Z}$ donnée par $n_{x_0}(x) = 0$ si $x \neq x_0$ et $n_{x_0}(x_0) = 1$.

Soit G un groupe fini opérant sur E par la loi $(g, x) \mapsto g.x$. On rappelle que $\mathbf{Z}[G] = \{f : G \to \mathbf{Z}\}$ est muni d'une structure d'anneau par $(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$ et $(f_1 f_2)(g) = \sum_{h\in G} f_1(h)f_2(h^{-1}g)$. On pourra noter l'élément $f \in \mathbf{Z}[G]$ par $\sum_{g\in G} f(g)[g]$.
3.a. Considérons l'application $\mathbf{Z}[G] \times \mathbf{Z}[E] \to \mathbf{Z}[E]$ qui associe à $\sum_{g\in G} f(g)[g], \sum_{x\in E} n(x)[x])$ l'élément $\sum_{g\in G}\sum_{x\in E} f(g)n(x)[g.x]$. Montrer que cette loi associe à $([g], [x])$ l'élément $[g.x]$ ($g \in G$, $x \in E$).
3.b. Montrer que cette loi fait de $\mathbf{Z}[E]$ un $\mathbf{Z}[G]$-module. (Elle étend l'action de G sur E par linéarité.)
3.c. Soit Y un sous-ensemble de E stable par l'action de G. Montrer que $\mathbf{Z}[Y]$ est un sous-module de $\mathbf{Z}[E]$.
3.d. Soient E_1, E_2... E_n les orbites de E sous G. Montrer que $\mathbf{Z}[E]$ est somme directe des sous-modules $\mathbf{Z}[E_1]$, $\mathbf{Z}[E_2]$ ....$\mathbf{Z}[E_n]$.
3.e. Montrer que $\mathbf{Z}\sum_{x\in E}[x]$ est un sous-module de $\mathbf{Z}[E]$.
3.f. Montrer que $\mathbf{Z}[E]^0 = \{n \in \mathbf{Z}[E] / \sum_{x\in X} n(x) = 0\}$ est un sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de $\mathbf{Z}[E]$. Quelle est son intersection avec $\mathbf{Z}\sum_{x\in E}[x]$? Est-ce une somme directe ?

4.a. Soit K un corps. Montrer que l'anneau de polynômes en une infinité d'indéterminées $A = K[(X_i)_{i\in\mathbf{N}}]$ n'est pas noethérien.
4.b. Montrer que A est un A-module de type fini non noethérien.

5.a. Montrer que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module de torsion.
5.b. Soient x_1,..., $x_n \in \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbf{Q}$ tel que $y \notin \mathbf{Z}x_1 + ... + \mathbf{Z}x_n$. En déduire que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ n'est pas de type fini.

6. Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules.
6.a. Posons $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ l'ensemble des homomorphismes de A-modules de M vers N. Montrer comment il est muni d'une structure de A-module.
6.b. Le A-module $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ s'appelle le *module dual* de M. Montrer que si M est libre de rang n, il en est de même de $\mathrm{Hom}_A(M, A)$.
6.c. Quel est le dual du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
6.d. Montrer que $m \mapsto (\phi \mapsto \phi(m))$ est un homomorphisme de A-modules $M \to (M^*)^*$. Montrer que c'est un isomorphisme lorsque M est libre de rang fini. Est-ce un isomorphisme lorsque $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?

6.f. Montrer qu'un homomorphisme de A-modules $f : M \to N$ donne lieu à un homomorphisme (dit *dual*) $f^* : N^* \to M^*$. Montrer que si f est injective, f^* est surjective.

7. Soit A un anneau. Soient M et N deux A-modules. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme surjectif de A-modules. Notons L le noyau de f.
7.a. Donner un exemple où M et L sont libres sans que N soit libre.
7.b. Montrer que si L et N sont libres, M est libre. Quel est le rang de M ?
7.c. Donner un exemple où M est libre sans que L soit libre. (On pourra penser à $A = M = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.)
7.d. Supposons que $M = A^2$ et $N = A$. Montrer que le noyau de f est libre.
7.e. Lorsque M est libre et L est de type fini, on dit que N est de *présentation finie*. Montrer que tout module de type fini sur un anneau principal est de présentation finie.
7.f. Soit K un corps. Supposons que $A = K[(X_i)_{i\in\mathbf{N}}]$. Considérons l'idéal I de A engendré par $\{X_1, X_2, ...\}$. Montrer que l'anneau-quotient A/I est isomorphe à K, ce qui fait de K un A-module. Montrer que K est de type fini comme A-module, mais pas de présentation finie.

8. Soit A un anneau. Soient M_0, $...M_n$ des A-modules. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, soit $f_i : M_{i-1} \to M_i$ un homomorphisme de A-modules. Si $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$ $(1 \leq i < n)$ et si f_1 est injective et f_n est surjective, on dit qu'on a une *suite exacte* et on écrit (c'est la situation dans laquelle nous nous plaçons) :

$$0 \to M_0 \to M_1 .... \to M_n \to 0.$$

8.a. Montrer que si A est un corps et M_i un espace vectoriel de dimension d_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = 0$. Montrer qu'il en est de même si A est principal et si M_i est libre de rang d_i comme A-module.
8.b. Montrer que si $A = \mathbf{Z}$ et M_i est un groupe abélien fini d'ordre t_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$.
8.c. Supposons que $A = \mathbf{Z}$ et $M_i = T_i \oplus N_i$, avec T_i fini d'ordre t_i et N_i libre de rang d_i, a-t-on $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = 0$ et $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$? (On pourra examiner le cas où $n = 2$, $M_0 = M_1 = \mathbf{Z}$, f_1 est la multiplication par 2 et f_2 est la surjection canonique $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.)

9.a. Le sous-$\mathbf{Z}$-module $2\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$ admet-il un supplémentaire ?
9.b. Tout sous-module libre d'un module libre admet-il un supplémentaire ?
9.c. Si N est un sous-module de M tel que M/N est libre montrer que N admet un supplémentaire dans M.

10. Donner les invariants des groupes abéliens suivants $(\mathbf{Z}/2014\mathbf{Z})$, $(\mathbf{Z}/2015\mathbf{Z})$, $(\mathbf{Z}/2014\mathbf{Z})^*$, $(\mathbf{Z}/2015\mathbf{Z})^*$.

11. Donner les invariants des $K[X]$-modules suivants issus d'un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel E.
11.a. Le cas où $K = \mathbf{R}$ et u est une rotation d'angle θ du plan euclidien $E = \mathbf{R}^2$.
11.b. Le cas où $E = K[X]/(P)$, avec $P \in K[X]$, $P \neq 0$, et u est la multiplication par X.
11.c. Le cas où $E = K^n$ et u est donné par l'expression, dans la base canonique $(e_1, ..., e_n)$, $u(e_i) = e_1 + e_2 + ... + e_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

12. Soit A un anneau. Soient M et N deux A-modules. Considérons le A-module $A[M \times N]$ formé par les fonctions $M \times N \to A$ qui sont à support fini. Pour $(m, n) \in M \times N$, on note $[m, n] \in A[M \times N]$ l'élément qui prend la valeur 1 en (m, n) et 0 ailleurs.
12.a. Montrer que $A[M \times N]$ admet pour base $([m, n])_{(m,n)\in M\times N}$.
12.b. Considérons le sous-module T de $A[M\times N]$ engendré par les éléments de la forme $[m, n_1+n_2]-[m, n_1]-[m, n_2]$, $[m_1 + m_2, n] - [m_1, n] - [m_2, n]$, $[am, n] - a[m, n]$, $[m, an] - a[m, n]$ $(m,\ m_1,\ m_2 \in M,\ n,\ n_1,\ n_2 \in N,\ a \in A)$. On note $M \otimes_A N$ le A-module quotient $A[M \times N]/T$. C'est le *produit tensoriel de M et N au dessus de A*. On note $m \otimes n$ l'image de $[m, n]$ dans $M \otimes_A N$. Montrer qu'on a $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$, $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$, $(am) \otimes n = a(m \otimes n) = m \otimes (an)$ $(m,\ m_1,\ m_2 \in M,\ n,\ n_1,\ n_2 \in N,\ a \in A)$
12.c. Supposons que A soit un corps. Montrer que si $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_m)$ sont des bases de M et N respectivement, $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in\{1,...,n\}\times\{1,...,m\}}$ est une base de $M \otimes_A N$. Quelles est alors la dimension de $M \otimes_A N$ en fonction des dimensions de M et N ?
12.d. Montrer qu'il existe parfois des éléments dans $M \otimes_A N$ qui ne s'écrivent pas sous la forme $m \otimes n$ avec $m \in M$, $n \in N$. (On pourra prendre par exemple le cas où A est un corps et $M = N = A^2$.)
12.e. Montrer qu'on a un homomorphisme de A-module $M \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M^*, N)$ qui à $x \otimes y$ associe l'application qui à $\phi \in M^*$ associe $\phi(x)y$.