Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Topologie algébrique – Année 2014-15

Feuille 6

Surfaces de Riemann modulaires

1. Posons $\Gamma(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})/ad-bc = 1\}$ et $\Gamma(2) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)/2|b, 2|c\}$. Montrer que ce sont des groupes. Notons $\mathcal{H}$ le demi-plan formé par les nombres complexes de partie imaginaire > 0. Posons $\mathrm{P}\Gamma(2) = \Gamma(2)/\{-1,1\}$ et $\mathrm{P}\Gamma(1) = \Gamma(1)/\{-1,1\}$ (où 1 et -1 désignent la matrice identité et son opposée).
1.a. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ opère par homographies sur $\mathcal{H}$ et que l'action se factorise par le quotient $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\{-1,1\}$. (Rappel : l'homographie associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est l'application $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$.)
1.b. L'espace $\mathcal{H}$ est-il simplement connexe ? Montrer qu'on a un homéomorphisme $h : \mathcal{H} \to \mathbf{D}^2$ qui à z associe $|z-i|/|z+i|$, où $\mathbf{D}^2 = \{z \in \mathbf{C}/|z| < 1\}$. Montrer que $\mathcal{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est homéomorphe à l'adhérence de $\mathbf{D}^2$ dans $\mathbf{C}$.
1.c. Soit u, v, w, t quatre nombres complexes deux-à-deux distincts. Le *birapport* de (u, v, w, t) est le nombre complexe $B(u, v, w, t) = (u-w)(v-t)/[(v-w)(u-t)]$. On rappelle que u, v, w, t sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel. Pour $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, montrer qu'on a $B(u, v, w, t) = B(\gamma.u, \gamma.v, \gamma.w, \gamma.t)$. On appelle *cercle de* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ les sous-ensembles qui sont soit des cercles de $\mathbf{C}$, soit l'union d'une droite avec le point à l'infini. Un tel cercle est dit *réel* s'il est invariant par la conjugaison complexe (c'est le cas si c'est une droite verticale ou la droite réelle ou un cercle symétrique par rapport à la droite réelle). On appelle *géodésique de* $\mathcal{H}$ l'intersection non-vide de $\mathcal{H}$ avec un cercle réel de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. En d'autres termes, une géodésique de $\mathcal{H}$ est : soit un demi-cercle orthogonal centré sur la droite réelle, soit une demi-droite orthogonale à la droite réelle ayant pour origine un nombre réel.
1.d. Montrer que l'image par $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ d'une géodésique de $\mathcal{H}$ est une géodésique de $\mathcal{H}$. Pour $u, v \in \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ distincts, on note $[u, v]$ la géodésique qui passe par u et v. C'est un demi-cercle si u et v sont distincts de ∞. C'est une demi-droite verticale d'orgine u, si $v = \infty$. Montrer qu'on a $[\gamma.u, \gamma.v] = \gamma.[u, v]$.
1.e. Notons D la partie de $\mathcal{H}$ délimitée par les géodésiques $[\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, \infty]$. Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U.[\infty, -1] = [\infty, 1]$ et que $V[-1, 0] = [0, 1]$. Quelle est l'image de D par h ? On dit ainsi que D est un *quadrilatère hyperbolique.*
1.f. Notons $\bar{D}$ l'adhérence de D dans $\mathcal{H}$. Montrer que tout point z de $\mathcal{H}$ admet un représentant dans $\bar{D}$ pour l'action de $\Gamma(2)$. (On pourra chercher $\gamma \in \Gamma(2)$ tel que $\Im(\gamma.z)$ ou $\Im(-1/\gamma.z)$ est maximal, et appliquer ensuite U^n, pour n entier bien choisi.)

Montrer que deux points distincts z, z' de $\bar{D}$ tels que $z' = \gamma.z$, avec $\gamma \in \Gamma(2)$, $\gamma \notin \{-1, 1\}$, sont à la frontière de D, et que $\gamma \in \{\pm U, \pm V, \pm U^{-1}, \pm V^{-1}\}$. Quitte à changer z et z' en $-1/z$ et $-1/z'$, on peut supposer que $|z| > 1$ et que $\Im(\gamma.z) > \Im(z)$.
1.g. L'action de $\Gamma(1)$ est-elle proprement discontinue sur $\mathcal{H}$? Même question pour $\Gamma(2)$, $\mathrm{P}\Gamma(1)$, $\mathrm{P}\Gamma(2)$.
1.h. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{P}\Gamma(2)$. On note Y_Γ l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ et $Y(2) = Y_{\mathrm{P}\Gamma(2)}$. Montrer qu'on a un revêtement $\mathcal{H} \to Y_\Gamma$ et un revêtement fini $Y_\Gamma \to Y(2)$. Montrer que Γ est le groupe fondamental de Y_Γ et que le revêtement $\mathcal{H} \to Y_\Gamma$ est universel.
1.i. Montrer que la sphère $\mathbf{S}^2$ est homéomorphe à un carré dont on a identifié deux paires de cotés adjacents. Montrer que D est homéomorphe à un carré ouvert. En déduire que $Y(2)$ est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^2$ privée de trois points, ou encore à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privé de $\{0, 1, \infty\}$. On observe que $Y_{\Gamma(2)}$ est obtenu en repliant le domaine $\bar{D}$ de $\mathcal{H}$. Concrètement l'homéomorphisme $Y(2) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$ est donné par la fonction suivante $\lambda(z) = 16q\prod_{n=1}^{\infty}((1+q^{2n})/(1+q^{2n-1}))^8$, où $q = e^{i\pi z}$. C'est une *fonction modulaire*, voisine de la célèbre fonction j. (On a la relation $j = 256(\lambda^2 - \lambda + 1)^3/[\lambda^2(1-\lambda)^2]$.) La fonction λ permet facilement de montrer le théorème de Picard: toute fonction holomorphe $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ dont l'image omet deux nombres complexes est constante (voir ci-dessous).
1.j. Montrer que le groupe $\mathrm{P}\Gamma(2)$ est librement engendré par $\{\pm U, \pm V\}$.

1.k. Montrer que $\mathcal{H}$ est un revêtement universel de la sphère $\mathbf{S}^2$ privée de trois points, ou encore de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privé de $\{0, 1, \infty\}$.
1.l. Un *horocycle* de $\mathcal{H}$ de centre $u \in \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est, si $u \neq \infty$, un disque ouvert de rayon > 0 de $\mathcal{H}$ dont la frontière contient u (il est nécessairement tangent à la droite réelle), c'est un demi-plan ouvert de frontière une droite horizontale si $u = \infty$. Montrer que l'image d'un horocycle de centre u par un élément de $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ est un horocycle de centre $\gamma.u$.
1.m. Montrer que l'action de $\Gamma(1)$ se prolonge à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. Montrer que $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ possède une seule orbite sous l'action de $\Gamma(1)$ et trois orbites, celles de 0, 1 et ∞, sous l'action de $\Gamma(2)$.
1.n. On munit $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ de la topologie qui prolonge celle de $\mathcal{H}$ et pour laquelle une base de voisinages de $u \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ est constituée par les horocycles de centre u. Montrer que l'espace quotient $X_\Gamma = \bar{\mathcal{H}} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ est compact. On pose $X(2) = X_{\Gamma(2)}$.
1.o. Le revêtement $Y_\Gamma \to Y(2)$ s'étend-il en général en un revêtement $X_\Gamma \to X(2)$?
1.p. Montrer que Γ est distingué dans $\mathrm{P}\Gamma(2)$ si et seulement si le revêtement $Y_\Gamma \to Y(2)$ est galoisien (voir ci-dessous).

Revêtements, groupe fondamental

1. Considérons le disque unité du plan complexe $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}/|z| \leq 1\}$. On le munit de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont d'une part les singletons $\{z\}$, pour $|z| < 1$, et d'autre part les paires $\{z, -z\}$, pour $|z| = 1$. La *bande de Möbius* M est l'espace $[0, 1]^2$ modulo la relation d'équivalence dont les classes sont les singletons $\{(x, y)\}$ avec $0 < y < 1$ et les paires $\{(x, 0), (1 - x, 1)\}$.
1.a. Montrer que l'espace quotient $X = \mathbf{D}/\mathcal{R}$ est compact.
1.b. Montrer que lacet $t \mapsto e^{2i\pi t}$ de X est homotope au lacet constant.
1.c. La surjection canonique $\mathbf{D} \to X$ est-elle un revêtement ?
1.d. En recouvrant X par un disque ouvert centré en 0 et une couronne ne contenant pas 0, appliquer le théorème de Van Kampen pour montrer que le groupe fondamental de X possède deux éléments.
1.e. Montrer que le lacet $t \mapsto e^{i\pi t}$ de X n'est pas homotope au lacet constant.
1.f. Montrer qu'on a une rétraction par déformation de M vers un segment dont on a identifié les extrémités (et qui est donc homéomorphe à un cercle). L'espace M est-il homéomorphe à X ?
1.g. Considérons l'espace Y obtenu comme quotient de $\mathbf{D}$ par la relation d'équivalence dont la seule classe non réduite à un singleton est $\{-1, 1\}$. Est-il homéomorphe à X ? à M ?

2.a. Soit $\pi : E \to B$ un revêtement. Soit B_1 et B_2 deux fermés de B tels que $B = B_1 \cup B_2$, et $B_1 \cap B_2$ est connexe et non vide. Montrer que si π est trivialisable au dessus de B_1 et B_2, il est trivialisable au dessus de B.
2.b. Cet énoncé est-il encore valable si on remplace "fermés" par "ouverts" ? Est-il encore valable si on ne suppose pas $B_1 \cap B_2$ connexe.
2.c. En déduire que tout revêtement de $[0, 1]$ est trivialisable.
2.d. Soit n un entier ≥ 1. Soit π un revêtement de $[0, 1]^n$. Montrer qu'il existe un recouvrement fini de de $[0, 1]^n$ par des ouverts, tels que π soit trivialisable sur chacun de ces ouverts.
2.d. Pour m entier ≥ 1 et k entier, $0 \leq k < m$, posons $I_k = [k/m, (k+1)/m]$. Montrer qu'il existe $m \geq 0$ tel que π est trivialisable sur les hypercubes $I_{k_1} \times ... \times I_{k_n}$ $(0 \leq k_i < m, 1 \leq i \leq n)$.
2.e. Montrer par récurrence sur l'entier $t \geq 0$ que π est trivialisable sur $[0, 1]^t \times I_{k_{t+1}} \times ... \times I_{k_n}$ $(0 \leq k_i < m,$ $t < i \leq n)$
2.f. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, tout revêtement de $[0, 1]^n$ est trivialisable. On pourra recouvrir $[0, 1]^n$ par des parallélépipèdes.

3. Considérons la somme amalgamée $A = \mathbf{Z}/2 \star \mathbf{Z}/2$.
3.a. Trouver un système d'écriture pour les éléments de A en écrivant une bijection explicite entre A et $\mathbf{Z}$.
3.b. Montrer que les sommes amalgamées commutent au passage au quotient. Autrement dit, si on a deux morphismes de groupes $H \to G_1$ et $H \to G_2$ et deux morphismes surjectifs $G_1 \to G_1'$ et $G_2 \to G_2'$, on a un morphisme surjectif $G_1 \star_H G_2 \to G_1' \star_H G_2'$ entre les sommes amalgamées. Pour cela, on pourra utiliser la notion d'épimorphisme, qui équivaut à la surjectivité dans la catégorie des groupes. (Bien entendu, la notation $G_1 \star_H G_2$ est abusive pour la somme amalgamée, puisque cette somme dépend des morphismes

$H \to G_1$ et $H \to G_2$, et pas seulement des groupes H, G_1 et G_2. On l'emploie lorsque les morphismes sont des inclusions.)
3.c. Montrer que A est un quotient du groupe libre sur deux lettres.
3.d. Trouver un espace topologique connexe par arcs dont le groupe fondamental est isomorphe à A.
3.e. Montrer que le groupe $D(A)$ des commutateurs de A est monogène d'ordre infini (et donc isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$) et que l'abélianisé $A^{\mathrm{ab}} = A/D(A)$ de A est produit de deux groupes cycliques d'ordre 2.

4. Soit ϕ un automorphisme d'un revêtement $\pi : E \to X$. Soit $* \in X$. Considérons le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes de π. Il est formé des homéomorphismes $E \to E$ qui commutent à π.
4.a. Rappeler comment le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ opère sur la fibre $\pi^{-1}(*)$ de $*$.
4.b. Montrer que ϕ induit une bijection $\pi^{-1}(*) \to \pi^{-1}(*)$ et vérifie $\phi(a.\sigma) = \phi(a).\sigma$ ($a \in \pi^{-1}(*)$, $\sigma \in \pi_1(X, *)$). On dit que ϕ est $\pi_1(X, *)$-*équivariante*. Notons $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,*)}(\pi^{-1}(*))$ le groupe des automorphismes $\pi_1(X, *)$-équivariants de $\pi^{-1}(*)$.
4.c. Supposons E non vide (ce n'est pas essentiel). Montrer que la fibre de $*$ est non-vide.
4.d. Montrer qu'on a un morphisme injectif de groupes $r : \mathrm{Aut}(\pi) \to \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,*)}(\pi^{-1}(*))$.
4.e. Supposons désormais E et X connexes et localement connexes par arcs. Montrer que r est surjectif.

5. Soit $\pi : E \to B$ un revêtement. Il est dit *principal* s'il existe un groupe G opérant de façon proprement discontinue sur E de telle sorte que le revêtement π soit isomorphe à $E \to E/G$. Supposons le revêtement π pointé (autrement dit, on a choisi un point-base $*$ de E, dont on note encore $*$ l'image par π). Supposons B connexe et localement connexe par arcs.
5.a. Supposons π principal. Montrer que $\pi_*(\pi_1(E, *))$ est distingué dans $\pi_1(B, *)$.
5.b. Dans le reste de l'exercice, on suppose que $\pi_*(\pi_1(E, *))$ est distingué dans $\pi_1(B, *)$. Posons $G = \mathrm{Aut}(\pi)$ (le groupe des automorphismes du revêtement π). Montrer que G agit transitivement et librement sur la fibre du point-base de B.
5.c. Montrer que G opère de façon proprement discontinue sur E.
5.d. Montrer que le revêtement π est principal.

6. Soit $\phi : E \to B$ un revêtement. Il est dit *galoisien* si E est connexe par arcs et le groupe $\mathrm{Aut}(\phi)$ des automorphismes de ϕ opère transitivement sur chaque fibre de ϕ. On dit alors que $\mathrm{Aut}(\phi)$ est le *groupe de* ϕ. Il s'identifie au groupe quotient $\pi_1(B, *)/\phi_*(\pi_1(E, *))$, où $*$ désigne à la fois un point-base de E et son image dans B.
6.a. Montrer que dans ce cas, on a un homéomorphisme $E/\mathrm{Aut}(\phi) \to B$.
6.b. Soit G un groupe discret opérant librement et proprement sur E, que l'on suppose ici connexe et localement compact. Montrer qu'on a un revêtement galoisien $\phi : E/G \to B$.
6.c. Montrer que tout revêtement connexe à deux feuillets est galoisien.
6.d. Donner un exemple de revêtement non galoisien à trois feuillets.
6.f. Un revêtement est dit *abélien* (resp. *cyclique*) s'il est galoisien et de groupe abélien (resp. cyclique). Soit $\phi : E \to B$ un revêtement galoisien de groupe G. On rappelle que G^{ab} est l'abélianisé de G, c'est-à-dire le quotient de G par son sous-groupe dérivé, ou encore le plus grand quotient abélien de G. Montrer qu'il existe un revêtement ϕ' : $E' \to B$ de groupe G^{ab} et un morphisme de revêtements de ϕ vers ϕ'. Peut-on le caractériser par une propriété universelle ?
6.g. Soit n un entier ≥ 1. Donner un exemple de revêtement abélien ϕ tel que $\mathrm{Aut}(\phi)$ est cyclique d'ordre n.
6.h. Soient $\phi_1 : E_1 \to B_1$ et $\phi_2 : E_2 \to B_2$ deux revêtements galoisiens de groupes G_1 et G_2 respectivement. Montrer que $\phi_1 \times \phi_2$ est un revêtement galoisien de groupe isomorphe à $G_1 \times G_2$.
6.i. Soit G un groupe abélien fini. On rappelle que G est isomorphe à un produit de groupes cycliques. En déduire qu'il existe un revêtement abélien $\phi_G : E_G \to B_G$ tel que $\mathrm{Aut}(\phi)$ est isomorphe à G. Cela est-il encore vrai si G est un groupe de type fini ? Peut-on imposer que B_G soit indépendant de G ?
6.j. Donner un exemple de revêtement abélien ϕ tel que $\mathrm{Aut}(\phi)$ est libre sur deux lettres.
6.k. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que le groupe diédral d'ordre $2n$ est isomorphe à un quotient d'un groupe libre sur deux lettres. Donner un exemple de revêtement abélien $\phi_n : E_n \to B_n$ tel que $\mathrm{Aut}(\phi_n)$ est diédral d'ordre $2n$. Peut-on rendre B_n indépendant de n ?
6.l. Soient $\phi_1 : E \to B$ et $\phi_2 : B \to C$ deux revêtements. Montrer que $\phi_2 \circ \phi_1$ est un revêtement. Montrer que si $\phi_2 \circ \phi_1$ est galoisien, ϕ_1 est galoisien. Donner un exemple où $\phi_2 \circ \phi_1$ est galoisien, mais ϕ_1 n'est pas

galoisien. Donner un exemple où ϕ_1 et ϕ_2 sont galoisiens, mais $\phi_2 \circ \phi_1$ n'est pas galoisien. Montrer que si ϕ_1 et ϕ_2 sont des revêtements à n_1 et n_2 feuillets, $\phi_2 \circ \phi_1$ est un revêtement à $n_1 n_2$ feuillets.
6.m. Comparer avec la théorie de Galois. Donner un espace topologique dont tous les revêtements finis sont cycliques. Donner un corps dont toutes les extensions finies sont cycliques.

7. Soit n un entier ≥ 1. Un *bouquet de n cercles* est un espace topologique obtenu en considérant n cercles $C_1 ... C_n$ deux-à-deux disjoints, et un point P_i dans le cercle C_i ($1 \leq i \leq n$) ; il est obtenu comme espace quotient de la réunion $C = \cup_{i=1}^{n}$ par la relation d'équivalence dont les classes sont $\{P_1, ..., P_n\}$ et les singletons $\{Q\}$ avec Q distincts de $P_1, ..., P_n$.
7.a. Montrer qu'un bouquet de n-cercles est homéomorphe à $\cup_{i=1}^{n} \mathcal{C}(1/i, 1/i)$, où $\mathcal{C}(a, r) = \{z \in \mathbf{C} / |z - a| = r\}$.
7.b. Montrer que le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est libre sur n générateurs.
7.c. Montrer que le plan privé de deux points (et donc la sphère $\mathbf{S}^2$ privée de trois points) a le même type d'homotopie (*i.e.* on a une équivalence d'homotopie) qu'un bouquet de deux cercles.
7.d. Montrer que le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ privé d'un point a le même type d'homotopie qu'un bouquet de deux cercles.
7.e. Considérons l'espace topologique $\mathcal{C} = \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(1/i, 1/i)$. Est-il connexe ? Est-il connexe par arcs ? Est-il localement connexe par arcs ? Est-il localement simplement connexe ? Est-il semi-localement simplement connexe ?
7.f. Montrer que le groupe fondamental de $\mathcal{C}$ n'est pas librement engendré par les groupes fondamentaux des $\mathcal{C}(1/i, 1/i)$, pour i entier ≥ 1 (construire un chemin qui fait le tour de $\mathcal{C}(1/i, 1/i)$ pour une infinité d'entiers i).

8. Soit T un ouvert de $\mathbf{C}$ borné et simplement connexe tel qu'on ait un revêtement $\pi : T \to \mathbf{C} - \{0, 1\}$ qui est une application holomorphe (un tel revêtement a été contruit ci-dessus, mais on n'a pas montré qu'il est holomorphe). Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} - \{0, 1\}$ une application holomorphe.
8.a. Soit $z \in \mathbf{C}$. Soit c un chemin de c d'origine 0 et d'extrémité z. Montrer qu'il existe un chemin d de T, dont la classe d'homotopie ne dépend pas de c, tel que $f \circ c = \pi \circ d$.
8.b. Montrer qu'il existe $g : \mathbf{C} \to T$ application holomorphe telle que $\pi \circ g = f$. En déduire que g est constante.
8.c. En déduire que f est constante, puis que toute fonction entière qui évite au moins deux valeurs dans $\mathbf{C}$ est constante (c'est le *(petit) théorème de Picard*).