Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Topologie algébrique – Année 2014-15

Feuille 5

Catégories

1. Considérons le diagramme commutatif suivant dans une catégorie $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & B & \to & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \to & B' & \to & C'. \end{array}$$

1.a. Montrer que si les carrés gauche et droit sont cocartésiens, le carré extérieur est cocartésien.
1.b. Montrer que si les carrés extérieur et gauche sont cocartésiens, le carré droit est cocartésien.
1.c. Exhiber un exemple pour lequel les carrés droit et extérieur sont cocartésiens, sans que le carré gauche soit cocartésien.

Groupe fondamental et revêtement

1. Soit $\pi : E \to X$ un revêtement de fibre F finie, non vide. Montrer que E est compact si et seulement si X est compact. On rappelle qu'un espace topologique X est compact s'il est séparé et si on peut extraire un sous-recouvrement fini de tout recouvrement de X par des ouverts.
1.a. Supposons X compact. Montrer que E séparé.
1.b. Supposons encore X compact. Montrer que E est compact.
1.c. Supposons E compact. Montrer que X est séparé.
1.d. Supposons encore E compact. Montrer que X est compact.

2. Soit n un entier ≥ 1. Considérons l'action du groupe $\{-1, 1\}$ sur la sphère $\mathbf{S}^n$.
2.a. Montrer que l'action est proprement discontinue.
2.b. Montrer qu'on a un revêtement $\mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{P}^n$?
2.c. Revenir à l'exercice sur les quaternions. Montrer qu'on a un revêtement de degré 2 : $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

3. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que l'action de $\mathbf{Z}^n$ sur $\mathbf{R}^n$ est proprement discontinue. En déduire le groupe fondamental de $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$.

4. On rappelle qu'un espace topologique X est dit *contractile* si et seulement si X est homotopiquement équivalent à un point.
4.a. Soit X un espace topologique. Montrer qu'il est contractile si et seulement si toute application continue $X \to Y$ (resp. $Y \to X$) est homotope à une fonction constante.
4.b. Montrer que la sphère $\mathbf{S}^2$ n'est pas contractile (mais est simplement connexe).

5. Soit X un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et de groupe fondamental fini. Soit f une application continue $X \to \mathbf{S}^1$. On rappelle qu'on a un foncteur π_1 de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes données par le groupe fondamental. Ainsi, si on fixe un point-base x_0 de X, on a un morphisme de groupes $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(\mathbf{S}^1, f(x_0))$.
5.a. Montrer que $\pi_1(f)$ (qu'on peut aussi noter f_*) est constante.
5.b. Montrer que f est homotope à une fonction constante.

6. Soit ϕ un automorphisme d'un revêtement $\pi : E \to X$. Soit $* \in X$. Considérons le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes de π. Il est formé des homéomorphismes $E \to E$ qui commutent à π.
6.a. Rappeler comment le groupe fondamental $\pi_1(X, *)$ opère sur la fibre $\pi^{-1}(*)$ de $*$.
6.b. Montrer que ϕ induit une bijection $\pi^{-1}(*) \to \pi^{-1}(*)$ et vérifie $\phi(a.\sigma) = \phi(a).\sigma$ ($a \in \pi^{-1}(*)$, $\sigma \in \pi_1(X, *)$). On dit que ϕ est $\pi_1(X, *)$-*équivariante*. Notons $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,*)}(\pi^{-1}(*))$ le groupe des automorphismes $\pi_1(X, *)$-équivariants de $\pi^{-1}(*)$.
6.c. Supposons E non vide (ce n'est pas essentiel). Montrer que la fibre de $*$ est non-vide.
6.d. Montrer qu'on a un morphisme injectif de groupes $r : \mathrm{Aut}(\pi) \to \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,*)}(\pi^{-1}(*))$.

6.e. Supposons désormais E et X connexes et localement connexes par arcs. Montrer que r est surjectif.

7. Soit $\phi : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques pointés.
7.a. Donner un exemple de telle application telle que l'application ϕ_* (qu'on peut aussi noter $\pi_1(\phi)$) qui s'en déduit sur les groupes fondamentaux ne soit pas injective.
7.b. Montrer que ϕ_* est injective si ϕ est un revêtement.

8.a. Montrer que groupe des automorphismes du revêtement $\mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.
8.b. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que le groupe des automorphisme du revêtement $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui à x associe nx est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

9. Soit $\phi : E \to B$ un revêtement. Il est dit *galoisien* si E est connexe et le groupe $\mathrm{Aut}(\phi)$ des automorphismes de ϕ opère transitivement sur chaque fibre de ϕ.
9.a. Montrer que dans ce cas, on a un homéomorphisme $E/\mathrm{Aut}(\phi) \to B$.
9.b. Soit G un groupe discret opérant librement et proprement sur E, que l'on suppose ici connexe et localement compact. Montrer qu'on a un revêtement galoisien $\phi : E/G \to B$.
9.c. Comparer à la théorie de Galois pour les extensions de corps.

10. On rappelle que $\mathbf{C}$ est un espace topologique isomorphe à $\mathbf{R}^2$. On le plonge dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par $z \mapsto (z, 1)$. Son image a pour complémentaire le point ∞, dont une base de voisinages est formée par les complémentaires des boules. On a un homémorphisme $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{S}^2$ qui justifie l'appellation *sphère de Riemann.*
10.a. Soit n un entier ≥ 2. L'application $z \mapsto z^n$ est-elle un revêtement $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$? De $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$?
10.b. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. À quelle condition $z \mapsto P(z)$ est-il un revêtement de $\mathbf{C}$?
10.c. On prolonge P en une fonction $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, par $P(\infty) = \infty$. À quelle condition est-ce un revêtement de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$?
10.d. Soit F une fraction rationnelle de $\mathbf{C}(X)$. Montrer qu'elle définit une application continue $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. À quelle condition est-ce un revêtement ?
10.e. L'application $z \mapsto e^z$ est-elle un revêtement $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$?

11. Posons $\Gamma(1) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})/ad - bc = 1\}$ et $\Gamma(2) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/2|b, 2|d\}$. Montrer que ce sont des groupes. Notons $\mathcal{H}$ le demi-plan formé par les nombres complexes de partie imaginaire > 0. Posons $\mathrm{P}\Gamma(2) = \Gamma(2)/\{-1, 1\}$ et $\mathrm{P}\Gamma(1) = \Gamma(1)/\{-1, 1\}$ (où 1 et -1 désignent la matrice identité et son opposée).
11.a. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ opère par homographies sur $\mathcal{H}$ et que l'action se factorise par le quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\{-1, 1\}$. (Rappel : l'homographie associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est l'application $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$.)
11.b. L'action de $\Gamma(1)$ est-elle proprement discontinue sur $\mathcal{H}$? Même question pour $\Gamma(2)$, $\mathrm{P}\Gamma(1)$, $\mathrm{P}\Gamma(2)$.
11.c. L'espace $\mathcal{H}$ est-il simplement connexe ? Montrer qu'on a un homéomorphisme $\mathcal{H} \to \mathbf{D}^2$ qui à z associe $|z - i|/|z + i|$, où $\mathbf{D}^2 = \{z \in \mathbf{C}/|z| < 1\}$.
11.d. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $P\Gamma(2)$. On note Y_Γ l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$. Montrer qu'on a un revêtement $\mathcal{H} \to Y_\Gamma$ et un revêtement fini $Y_\Gamma \to Y_{\Gamma(2)}$
11.e. Montrer que Γ est le groupe fondamental de Y_Γ et que le revêtement $\mathcal{H} \to Y_\Gamma$ est universel.
11.f. Soit u, v, w, t quatre nombres complexes deux-à-deux distincts. On note $[u, v, w, t] = (u-w)(u-t)/[(v-w)(v-t)]$ (le *birapport* de (u, v, w, t). Pour $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, montrer qu'on a $[u, v, w, t] = [\gamma u, \gamma v, \gamma w, \gamma t]$. On rappelle que u, v, w, t sont cocyclique ou alignés si et seulement si leur birapport est réel. On appelle *cercle de* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sous-ensembles qui sont des cercles de $\mathbf{C}$ ou l'union de droite avec le point à l'infini. On appelle *géodésique de* $\mathcal{H}$ l'intersection de $\mathcal{H}$ avec un cercle de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui est invariant par la conjugaison complexe. En d'autres termes, une géodésique de $\mathcal{H}$ est : soit un demi cercle orthogonal à la droite réelle, soit une demi-droite othogonale à la droite réelle ayant pour origine un nombre réel.

Montrer que l'image par $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ d'une géodésique de $\mathcal{H}$ est une géodésique de $\mathcal{H}$.
11.g. Montrer que $Y_{\Gamma(2)}$ est obtenu en repliant le domaine D de $\mathcal{H}$ délimité par les demi-droites $\{z \in \mathcal{H}/\Re(z) = 1\}$ et $\{z \in \mathcal{H}/\Re(z) = -1\}$ et les demi-cercles de rayon $1/2$ centrés en $1/2$ et $-1/2$ respectivement. (Faire un dessin.) Autrement dit D est délimité par des géodésiques. Montrer que

11.h . Montrer que le groupe $\mathrm{P}\Gamma(2)$ est librement engendré par les classes des éléments $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.