Université Paris Diderot — Topologie algébrique – Année 2014-15
M1 mathématiques

Feuille 4

Groupe fondamental et revêtement

1.a. Soit $\phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$ le morphisme de groupes construit précédemment à l'aide des quaternions. Montrer que c'est une application continue. En déduire que son image est connexe.
1.b. Montrer que ϕ est une application ouverte (en montrant que c'est un difféomorphisme).
1.c. Montrer que la composante de l'identité de $\mathrm{O}(3)$ est contenue dans $\mathrm{SO}(3)$.
1.d. Montrer que $\mathrm{SO}(3)$ est connexe par arcs. On pourra utiliser que toute matrice de $\mathrm{SO}(3)$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbf{R}$.
1.e. En déduire l'isomorphisme de groupes topologiques $\mathrm{SU}(2)/\{-1, 1\} \to \mathrm{SO}(3)$.
1.f. En utilisant l'homéomorphisme $\mathrm{SU}(2) \simeq \mathbf{S}^3$, montrer que $\mathrm{SU}(2)$ est simplement connexe.
1.g. En déduire que les groupes fondamentaux de $\mathrm{SO}(3)$, puis de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$, sont cycliques d'ordre 2.

Théorème de Van Kampen et applications

1. Déterminer le groupoïde libre sur les graphes suivants.
1.a. Un graphe à un sommet a et deux arêtes $a \to a$.
1.b. Un graphe à deux sommets a et b et une arête $a \to b$.
1.c. Un graphe à trois sommets a, b et c et deux arêtes $a \to b$ et $b \to c$.

2. Considérons l'espace topologique C formé par les arêtes d'un cube de $\mathbf{R}^3$. On pourra le considérer comme un graphe non orienté à 12 arêtes et 8 sommets.
2.a. Dessiner un arbre maximal A sur ce graphe. On vérifiera qu'il est composé de 7 arêtes et que son groupe fondamental est trivial. Notons B l'ensemble des arêtes qui ne sont pas dans A.
2.b. Montrer que le groupe fondamental de $A \cup b$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.
2.c. En déduire que le groupe fondamental de C est libre sur 5 générateurs.
2.d. Déterminer par la même méthode le groupe fondamental des espaces topologiques formés par les arêtes d'un tétraèdre régulier, d'un octaèdre régulier, des coutures d'un ballon de football etc.

3.a. Soit U un ouvert convexe non vide de $\mathbf{R}^2$. Montrer par récurrence sur n que le groupe fondamental de U privé de n points est libre sur n générateurs.
3.b. Montrer que le groupe fondamental de $\mathbf{S}^2$ privé de n points est un groupe libre sur $n-1$ générateurs.
3.c. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3$ privé de n droites deux à deux distinctes passant toutes par l'origine ?
3.d. Notons $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ la *droite projective complexe*. C'est l'ensemble $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ modulo l'action diagonale de $\mathbf{C}^*$. On le munit de la topologie quotient. Il est alors homéomorphe à la réunion de $\mathbf{C}$ et d'un point à l'infini (dont une base de voisinages est formée par les complémentaires des boules ouvertes centrées en 0). Montrer qu'il est homéomorphe à $\mathbf{S}^2$. Quel est le groupe fondamental de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privé de n points ?

4.a. Montrer que le groupe fondamental de $\mathbf{S}^n$, la sphère de dimension n, est trivial pour $n \geq 2$.
4.b. Calculer le groupe fondamental de la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, pour $n \geq 2$.

5.a. Déterminer le groupe fondamental du tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ (faire un dessin).
5.b. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ privé d'un point.
5.c. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privée de un point, de deux points, de trois points.
5.d. La droite projective complexe privée de trois points est-elle homéomorphe au tore privé d'un point ? (Ôter un lacet bien choisi au tore, de telle sorte qu'il reste simplement connexe.)

6. On va montrer par récurrence sur n, entier ≥ 3, que le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(n)$ est un groupe à deux éléments. Le cas $n = 3$ est traité ci-dessus. Notons $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$. Soit

$x_0 \in \mathbf{S}^{n-1}$. Notons G le stabilisateur de x_0 dans SO(n). Pour x, $y \in \mathbf{S}^{n-1}$, $x \notin \{y, -y\}$, posons, pour $z \in \mathbf{R}^n$, $\alpha_x^y(z) = \frac{\langle x,z\rangle - \langle x,y\rangle\langle z,y\rangle}{1-\langle x,y\rangle^2}$, et $r_x^y(z) = z - \alpha_y^x(z)(x+y-2\langle x,y\rangle x) + \alpha_y^x(x)(x-y)$.
6.a. Montrer que G est un groupe topologique isomorphe à SO($n-1$).
6.b. Montrer que α_x^y est bien défini. Montrer que si z est orthogonal à x et y, on a $r_x^y(z) = z$. En déduire que le plan vectoriel engendré par x et y est stable par r_x^y. Montrer que $r_x^y(y) = x$ et $r_x^y(x) = -y + 2\langle x, y >$. En déduire que $r_x^y \in$ SO(n). Montrer que r_x^y tend vers 1 lorsque x tend vers y ou $-y$. On pose donc $r_x^x = r_x^{-x} = 1$.
6.c. Soit π : SO(n) $\to \mathbf{S}^{n-1}$ donnée par $\pi(f) = f(x_0)$. Pour $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, posons $U_x = \mathbf{S}^{n-1} - x$ et $V_x = \pi^{-1}(U_x)$. Montrer que pour $x \neq x_0$, $f \mapsto (\pi(f), r_{-x}^{x_0} \circ r_{f(x_0)}^x \circ f)$ définit un homéomorphisme $V_x \to U_x \times G$, dont on donnera l'inverse.
6.d. Soit $x_1 \in \mathbf{S}^{n-1} - \{x_0, -x_0\}$. Montrer que le groupe fondamental de V_{x_1} est d'ordre 2. Montrer que linclusion $V_{x_1} \cap V_{-x_1} \subset V_{x_1}$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.
6.e. Appliquer le théorème de van Kampen avec les ouverts V_{x_1} et V_{-x_1} pour montrer que l'inclusion $V_{x_1} \subset$ SO(n) induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux.

Théorème de Borsuk-Ulam et applications

1. Soit f une application continue $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$. On se propose de montrer qu'il existe $a \in \mathbf{S}^2$ tel que $f(a) = f(-a)$ (*Théorème de Borsuk-Ulam*). Supposons que a n'existe pas.
1.a. Soit f_1 une application continue $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^1$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{S}^1$ tel que $f_1(a) = f_1(-a)$.
1.b. Considérons g : $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^1$, donnée par $g(t) = (f(t) - f(-t))/|f(t) - f(-t)|$. Considérons le lacet α : $s \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0)$, qui fait le tour de l'équateur de $\mathbf{S}^2$. On a un lacet composé $\beta = g \circ \alpha : [0,1] \to \mathbf{S}^1$. Montrer que α est contractile dans $\mathbf{S}^2$. En déduire que β est contractile.
1.c. Montrer qu'on a $\beta(s) = -\beta(s+1/2)$ ($s \in [0, 1/2]$). Identifions $\mathbf{S}^1$ à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et relevons le lacet β en un chemin $\tilde{\beta}$: $[0,1] \to \mathbf{R}$. Montrer qu'on a $\tilde{\beta}(s+1/2) = \tilde{\beta}(s) + m$ avec $m \in 1/2 + \mathbf{Z}$ indépendant de s.
1.d. En déduire la classe de β dans $\pi_1(\mathbf{S}^1) \simeq \mathbf{Z}$ est égale à $2m+1$ un générateur de ce groupe.
1.e. En déduire que β n'est pas contractile.
1.f. Montrer qu'il existe deux points antipodaux sur Terre qui ont même température et où la vitesse du vent est la même. Cela est-il vrai même si on tient compte du fait que la surface de la Terre n'est pas une sphère parfaite (relief, aplatissement des pôles) ?

2. Soient F_1, F_2 et F_3 trois fermés de $\mathbf{S}^2$, et dont la réunion est $\mathbf{S}^2$. Notons d la distance de $\mathbf{R}^3$, qui induit une distance sur $\mathbf{S}^2$. Pour $i \in \{1,2,3\}$ et $x \in \mathbf{S}^2$, posons $\delta_i(x) = \min_{y \in F_i} d(x,y)$. C'est la *distance* de x à F_i.
2.a. Montrer que, pour $i \in \{1,2,3\}$, la fonctions δ_i est continue et qu'on a $\delta_i(x) = 0$ si et seulement si $x \in F_i$.
2.b. Montrer qu'il existe $x \in \mathbf{S}^2$ tel que $\delta_1(x) = \delta_1(-x)$ et $\delta_2(x) = \delta_2(-x)$.
2.c. En déduire que F_1, F_2 ou F_3 contient deux points antipodaux.
2.d. Existe-t-il quatre fermés de $\mathbf{S}^2$, dont la réunion est $\mathbf{S}^2$, tels qu'aucun d'entre eux ne contiennent de paire de points antipodaux ? (Inscrire $\mathbf{S}^2$ dans un tétraèdre régulier.)
2.e. Montrer que le soleil ne se couche jamais sur le territoire de l'un au moins des trois états qui se partagent la Terre dans le roman *1984* de G. Orwell.

3. Considérons trois solides (en fait trois ensembles compact mesurables) E_1, E_2 et E_3 dans $\mathbf{R}^3$. On se propose de montrer qu'il existe un plan affine de $\mathbf{R}^3$ qui coupe chacun des trois solides en deux parties égales (c'est le *théorème du sandwich*, dit parfois *théorème du sandwich au jambon*, puisqu'il affirme qu'il existe une découpe en un seul coup de couteau – ou plutôt de katana ou de couperet – qui partage chaque tranche de pain et une tranche de jambon en deux parties égales). On dit qu'un plan P *coupe* E_i *en deux parties égales* si les intersections de E_i avec chacune des deux composantes connexes de $\mathbf{R}^3 - P$ ont même mesure.
3.a. Considérons la sphère unité $\mathbf{S}^2$ centrée en l'origine O de $\mathbf{R}^3$. Soit M un point de $\mathbf{S}^2$. Notons $\overrightarrow{P_M}$ le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ orthogonal à $\overrightarrow{OM}$. Montrer qu'il existe un plan affine P_M de direction $\overrightarrow{P_M}$ qui coupe E_3 en deux parties égales. Notons P_M^+ le demi-espace de bord P_M vers lequel pointe $\overrightarrow{OM}$.
3.b. Considérons la fonction f_i qui à M associe la mesure de $P_M^+ \cap E_i$ ($i \in \{1,2\}$). Montrer qu'on a $f_i(M) = f_i(-M)$ si et seulement si P_M coupe E_i en deux parties égales.
3.c. En considérant la fonction $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$ qui à M associe $(f_1(M), f_2(M))$, montrer qu'il existe M tel que P_M coupe E_1, E_2 et E_3 en deux parties égales.