Université Paris Diderot — Topologie algébrique – Année 2014-15
M1 mathématiques

Feuille 3

Équivalence d'homotopie, rétraction par déformation

1.a. Montrer que le cercle est homotopiquement équivalent au plan privé d'un point. Est-il homéomorphe au plan privé d'un point ?
1.b. Soit n un entier ≥ 1. Notons $\mathbf{S}^n$ la sphère unité de dimension n dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Montrer qu'elle est homotopiquement équivalente à $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$.
1.c. Soient N et S deux points distincts de $\mathbf{S}^n$ (les *pôles*). Montrer que $\mathbf{S}^{n-1}$ est homotopiquement équivalent à $\mathbf{S}^n - \{N, S\}$.

2. Considérons quotient de l'ensemble $\mathbf{R} \times [-1, 1]$ par la relation d'équivalence définie par : $(x, y) \sim (x', y')$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $(x', y') = (x + k, (-1)^k y)$. On le munit de la topologie quotient. C'est le *ruban de Moebius*. Montrer qu'il est homotopiquement équivalent au cercle.

3. Montrer que la sphère $\mathbf{S}^n$ privée d'un point est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$. On pourra utiliser la *projection stéréographique*. Elle est définie ainsi pour $n = 2$. La sphère est privée du pôle nord. On considère le plan P tangent à la sphère en le pôle sud. La projection stéréographique associe à x (différent du pôle sud) l'intersection de P et de la droite tangente en x au méridien qui passe par x. Elle envoie le pôle sud sur lui-même.

4.a. Notons X le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ formé de la réunion des cercles C_0 et C_1 de centres 0 et 1 respectivement et de rayon 1/2. Montrer que $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ se rétracte par déformation sur X.
4.b. Montrer que $\mathbf{C}^2 - \Delta = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 / z_1 \neq z_2\}$ se rétracte par déformation dans $\mathbf{C}^2$ sur l'ensemble $\{0\} \times \mathbf{S}^1$.
4.c. Notons D le sous-ensemble de $\mathbf{C}^3$ formé par les triplets de coordonnées deux-à-deux distinctes. Montrer que D se rétracte par déformation dans $\mathbf{C}^3$ sur l'ensemble $\{(0, u, uv) \in \mathbf{C}^3 / u \in \mathbf{S}^1, v \in X\}$.

5. Soit n un entier ≥ 1. Notons $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ l'espace projectif de dimension n (on le note aussi $\mathbf{RP}^n$). C'est le quotient de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ par l'action de $\mathbf{R}^*$, muni de la topologie quotient.
5.a. Montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ s'identifie à $\mathbf{S}^n$ l'espace quotient par l'action du groupe $\{-I_{n+1}, I_{n+1}\}$.
5.b. Montrer que $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ est homotopiquement équivalent à $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ privé d'un point.

6. Montrer que $\mathbf{R}^3$ privé de n droites deux-à-deux disjointes est homotopiquement équivalent au plan privé de n points.

Théorème du point fixe de Brouwer

1. Notons $\mathbf{D}^2$ le disque unité ouvert du plan. Notons $\bar{\mathbf{D}}^2$ le disque unité fermé du plan. Soit $f : \bar{\mathbf{D}}^2 \to \bar{\mathbf{D}}^2$ une hypothétique application continue sans point fixe.
1.a. Soit ϕ une application continue du disque unité fermé dans $\mathbf{S}^1$, qui est l'identité sur $\mathbf{S}^1$. C'est une *rétraction par déformation* du disque fermé sur sa frontière, le cercle. Montrer que l'application $H : [0, 1]^2 \to \mathbf{S}^1$ telle que $H(x, t) = \phi(xe^{2i\pi t})$ est une homotopie d'un lacet constant à un lacet qui fait un tour du cercle. En déduire que ϕ n'existe pas.
1.b. Pour $x \in \bar{\mathbf{D}}^2$, soit $g(x) \in \mathbf{S}^1$ l'unique point du cercle unité tel que les vecteurs $\overrightarrow{xf(x)}$ et $\overrightarrow{xg(x)}$ ont même direction. Montrer que l'application g est continue.
1.c. En déduire le théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2 : Toute application continue $\bar{\mathbf{D}}^2 \to \bar{\mathbf{D}}^2$ admet un point fixe.
1.d. Le théorème du point fixe de Brouwer est-il encore vrai si on remplace le disque unité par une boule ouverte, un rectangle fermé, une ellipse fermée, un fermé étoilé autour d'un point, un compact étoilé autour d'un point, par une sphère de dimension 2, par le plan projectif, par la surface d'un tore, par une couronne du plan ?

1.e. Soit n un entier ≥ 1. Admettons qu'il n'y a pas de rétraction par déformation de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ sur sa frontière $\mathbf{S}^n$. Démontrer que toute application continue de la boule unité fermée de dimension n dans elle-même admet un point fixe. En déduire que toute application continue $K \to K$ admet un point fixe, lorsque K est un compact convexe de $\mathbf{R}^n$ (ou, plus généralement, un compact étoilé autour d'un point).

2. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. Supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$.
2.a. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que $f^n(z) = P(z)$, et $f(z)/z \to 1$ lorsque z tend vers l'infini.
2.b. Posons $g(z) = z - f(z)/2$. Montrer que pour R nombre réel assez grand, la fonction g laisse stable la boule ouverte $B(0, R)$ de centre 0 et de rayon R.
2.c. En déduire que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine.

3. Considérer deux feuilles de papier identiques, rectangulaires. Les superposer de telle sorte qu'il y ait bijection des points de l'une sur les points de l'autre. Froisser l'une de ses feuilles, sans la déchirer, et la poser sur l'autre feuille sans qu'elle dépasse. Vérifier qu'un point de la première feuille est encore au-dessus de son correspondant de la deuxième feuille. On peut faire le même exercice avec une nappe sur une table, un drap sur un lit etc.

4. Considérons le jeu de Hex. Le plan de jeu est ci-joint. Le territoire initial de chacun des deux joueurs est composé une paire de rives opposées. Les hexagones intermédiaires sont inoccupés au début de la partie. Les joueurs jouent en prenant possession à tour de rôle d'un hexagone inoccupé. Le but de chacun des deux joueurs est de connecter ses deux rives le premier en prenant possession d'une suite d'hexagones contigus. Y a-t-il des parties nulles au jeu de Hex ?

Quaternions et applications

Soit n un entier ≥ 1. On note $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ le groupe orthogonal et le groupe spécial orthogonal respectivement opérant sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On les munit de la topologie de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On note $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ le groupe unitaire et le groupe spécial unitaire opérant sur l'espace hermitien $\mathbf{C}^n$. On les munit de la topologie de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Les groupes $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont des *groupes topologiques.*

Posons $\mathbf{H} = \{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C})/a, b \in \mathbf{C}\}$. C'est l'ensemble des *quaternions.* On pose de plus $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Soit $m = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$. On pose $\bar{m} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $||m|| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

1. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de dimension 4 de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ de base $(1, I, J, K)$ et que c'est une sous-algèbre de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$.

2. Montrer qu'on a $m\bar{m} = ||m||^2 1$. En déduire que $\mathbf{H}$ est un corps. Montrer que le centre de $\mathbf{H}$ (c'est-à-dire l'ensemble de ses éléments qui commutent à tout $\mathbf{H}$) est le sous-corps $\mathbf{R}1$ (identifié à $\mathbf{R}$).

3. Montrer que $||.||$ est une norme euclidienne sur $\mathbf{H}$, et une norme de l'anneau $\mathbf{H}$. Montrer que la sphère $\mathbf{S}(\mathbf{H})$ de rayon 1 de $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathbf{H}^*$. Donner une bijection $\mathbf{S}(\mathbf{H}) \simeq \mathrm{SU}(2)$.

4. On pose $P = \{xI + yJ + zK/(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$ (ensemble des *quaternions purs*). Montrer que P est stable par conjugaison par $\mathbf{H}^*$. En déduire un isomorphisme de groupes $\mathbf{H}^*/\mathbf{R}^* \simeq \mathrm{SU}(2)/\{-1, 1\}$.

5. Démontrer que la conjugaison par $m \in \mathbf{H}^*$ est une isométrie de P. En déduire un morphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ de noyau $\{-1, 1\}$.

6. Montrer que la conjugaison par $m \in \mathbf{H}^*$ se factorise par l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{H}) \simeq \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$. En déduire une bijection $\mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \simeq \mathrm{SO}(3)$.

7. Soient m, $n \in \mathbf{H}^*$. Notons $\phi_{m,n} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ l'application donnée par $\phi(h) = mhn^{-1}$. En déduire qu'on a un morphisme surjectif de groupes $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ de noyau $\{(1, 1), (-1, -1)\}$.

8. Montrer que la bijection $\mathbf{S}(\mathbf{H}) \simeq \mathrm{SU}(2)$ est un homéomorphisme, que le morphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ est un revêtement double, que la bijection $\mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \simeq \mathrm{SO}(3)$ est un homéomorphisme, que le morphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ est un revêtement double.