Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Topologie algébrique – Année 2014-15

Feuille 2

Topologie générale

1. Soit X un espace topologique égal à une réunion finie $\cup_{i \in I} F_i$ de ses fermés. Soit $f : X \to Y$ une application, qui est continue sur F_i ($i \in I$). Montrer que f est continue.

2. Soit X un espace métrique compact. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts recouvrant X. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on note $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.
2.a. Montrer que X est borné. Notons Δ son diamètre (*i.e.* la borne supérieure de l'ensemble des distances qui séparent deux points de X).
2.b. Soit $f : X \to]0, +\infty[$ telle que $f(x) = \mathrm{Sup} \cup_{i \in I} \{r \in [0, \Delta]/B(x,r) \subset \Omega_i\}$. Montrer que f est 1-Lipschitzienne.
2.c. En déduire qu'il existe $r > 0$ (le *nombre de Lebesgue*) tel que pour toute boule ouverte B de rayon r il existe $i \in I$ tel que $B \subset \Omega_i$. C'est le *lemme de Lebesgue.*

Équivalence de catégories

1.a On dit que deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont *isomorphes* si elles sont isomorphes en tant qu'objets de la catégorie des catégories. On dit qu'elles sont *équivalentes*, s'il existe un foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ et un foncteur G de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{C}$ et des isomorphismes naturels (*i.e* des transformations naturelles données par des familles d'isomorphismes) de FG (resp. GF) vers le foncteur identité de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{C}$). Montrer qu'il revient au même de dire qu'il existe un foncteur H de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ qui est plein, fidèle et essentiellement surjectif (tout objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à un objet de la forme $H(X)$ avec X objet de $\mathcal{C}$). Montrer que des catégories isomorphes sont équivalentes.
1.b. Montrer qu'une équivalence de catégories respecte les objets initiaux, les objets finaux, les monomorphimes, les épimorphismes et les isomorphismes.

2. Considérons la catégorie des ensembles finis. Montrer qu'elle est équivalente à la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les sont les entiers ≥ 0 et $\mathcal{C}(n,m)$ est l'ensemble des applications $\{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., m\}$.

3. Considérons la catégorie $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K fixé. Montrer qu'elle est équivalente à la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les entiers ≥ 0 et $\mathcal{C}(n,m)$ est l'ensemble des matrices $n \times m$.

4. Considérons les ensembles $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ ordonnés par la relation de divisibilité. Montrer que les catégories associées sont équivalentes.

5. Montrer que la catégorie des ensembles, avec les morphismes définis par les applications partielles, est équivalente à la catégorie des ensembles pointés.

6. Montrer que la catégorie à un objet et un morphisme est équivalente à la catégorie $\mathcal{C}$ à deux objets, a et b, telle que $\mathcal{C}(a,a) = \{\mathrm{id}_a\}$, $\mathcal{C}(b,b) = \{\mathrm{id}_b\}$, $\mathcal{C}(a,b) = \{f_{a,b}\}$, $\mathcal{C}(b,a) = \{f_{b,a}\}$ ($f_{a,b}$ et $f_{b,a}$ sont nécessairement des isomorphismes réciproques l'un de l'autre). Est-elle isomorphe à la catégorie $\mathcal{C}'$ à deux objets, a et b, telle que $\mathcal{C}'(a,a) = \{\mathrm{id}_a\}$, $\mathcal{C}'(b,b) = \{\mathrm{id}_b\}$, $\mathcal{C}(a,b) = \emptyset = \mathcal{C}(b,a)$?

7. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{C}_0$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ telle que tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un objet de $\mathcal{C}_0$, et telle que $\mathcal{C}_0(x,y)$ ne contient aucun isomorphisme si $x \neq y$. On dit que $\mathcal{C}_0$ est un *squelette* de $\mathcal{C}$.
7.a. Montrer que deux squelettes de $\mathcal{C}$ sont des catégories isomorphes.
7.b. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ sont équivalentes.
7.c. Montrer que deux catégories sont équivalentes si et seulement si leurs squelettes sont isomorphes.
7.d. Montrer que toute petite catégorie (et même toute catégorie, suivant la version de l'axiome du choix que l'on accepte) admet un squelette.

8.a. Montrer qu'on a un foncteur de la catégorie des groupes vers la catégorie des groupes abéliens qui à un groupe G associe l'abélianisé G^{ab} de G. Rappelons que l'abélianisé de G est le groupe quotient $G/[G,G]$, où $[G,G]$ est le sous groupe de G engendré par les commutateurs de G (*i.e.* les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$, $g,\, h\in G$).
8.b. Est-il plein ? Est-il fidèle ?
8.c. Peut-on le définir comme solution d'un problème universel ?
8.d. Considérons la catégorie dont les objets sont les groupes et dont les morphismes sont les morphismes de groupes de noyau fini. Montrer qu'on a un foncteur contravariant de cette catégorie dans la catégorie des groupes abéliens : il associe au groupe G son abélianisé et au morphisme $\phi : G \to G'$, le morphisme $\phi^* : G'^{\mathrm{ab}} \to G^{\mathrm{ab}}$ donné par $\phi^*(g') = \prod_{g\in G, \phi(g)=g'} \phi(g)$ (on justifiera la définition de ce produit).

Groupoïdes

1. Montrer que les structures suivantes définissent des groupoïdes : une réunion disjointe de groupes, un ensemble muni d'une relation d'équivalence, un groupe opérant sur un ensemble. Dans la situation d'un groupe opérant sur un ensemble, que signifie que l'action est transitive, libre ? Montrer qu'un espace affine définit un groupoïde transitif.

2. Soit G un groupe. Soit X un G-ensemble. On a une action diagonale de G sur X^2. Soit H un sous-groupe de G. Considérons la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les classes $H\backslash X$ et dont les morphismes $\bar{x} \to \bar{y}$ sont en bijection avec les classes dans $H\backslash X^2$ des couples $(x,y)\in X^2$ représentant $(\bar{x},\bar{y})$. On note $\{x,y\}$ la classe de (x,y) dans $\mathcal{C}(\bar{x},\bar{y})$. On suppose qu'on a les relations $\{y,z\}\circ\{x,y\} = \{x,z\}$ $(x,\, y,\, z\in X)$, que l'on justifiera. (Comparer à la "relation de Chasles" : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ dans l'espace vectoriel associé à un espace affine.)
2.a. Montrer que $\mathcal{C}$ est un groupoïde et qu'on a les relations $\{x,x\} = \mathrm{Id}_{\bar{x}}$, $\{hx,hy\} = \{x,y\}$ et $\{x,y\}^{-1} = \{y,x\}$ $(x,\, y\in X,\, h\in H)$.
2.b. Supposons que H opère transitivement sur X. Montrer que $\mathcal{C}$ est la catégorie associée à un groupe noté T. Notons T^{ab} le groupe abélianisé de T et $\overline{\{x,y\}}$ l'image de $\{x,y\}$ dans T^{ab}. Montrer que l'application $\phi : H \to T^{\mathrm{ab}}$ qui à h associe $\overline{\{x,hx\}}$ ne dépend pas du choix de x et est un morphisme surjectif de groupes. Montrer que les stabilisateurs des éléments de X pour l'action de H sont dans le noyau de ϕ.
2.c. Supposons que H opère transitivement et librement sur X, et que X a au moins trois éléments. Montrer que T est un groupe trivial si H opère doublement transitivement sur X (*i.e.* pour tout $(x,y)\in X^2$, $x\neq y$ et tout $(x',y')\in X^2$, $x'\neq y'$, il existe $h\in H$ tel que $(x',y') = (hx,hy)$).
2.c. Soit $x\in X$. Supposons que le centre Z de H opère transitivement sur Hx. Montrer que l'application $\psi : H \to \mathrm{Aut}(\bar{x})$ qui à h associe $\{x,hx\}$ ne dépend pas du choix de x et est un morphisme surjectif de groupes. Montrer que les stabilisateurs des éléments de X pour l'action de H sont dans le noyau de ψ.
2.e. Supposons que G opère transitivement sur X, et qu'il existe un système de générateurs constitué de deux éléments σ, τ de G, et que σ est d'ordre 2. Supposons que τ stabilise $x_0\in X$. Montrer que tout morphisme de $\mathcal{C}$ est obtenu en composant des morphismes de la forme $\phi(g) = \{g\sigma x_0, gx_0\}$ $(g\in G)$. Montrer que $\phi(g)$ ne dépend que de Hg dans $H\backslash G$ et qu'on a $\phi(g)\circ\phi(g\sigma) = \mathrm{Id}_{\bar{x}_0}$.
2.f. Supposons que X soit une partie discrète d'un espace topologique Y simplement connexe sur lequel l'action de G se prolonge continûment. On munit $H\backslash Y$ de la topologie quotient. Quel est le lien entre $\mathcal{C}$ et le groupoïde fondamental $\pi_1(H\backslash Y, H\backslash X)$?
2.g. Cette construction trouve une application concrète dans la situation suivante. On considère le groupe $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\{-1,1\}$. Il opère sur $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ par homographies : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.x = (ax+b)/(cx+d)$, on convient que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\infty = a/c$ et que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.x = \infty$ si $cx+d=0$. Alors G est engendré par $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cette dernière matrice stabilise ∞. On peut considérer un sous-groupe H d'indice fini de G, par exemple un sous-groupe de la forme $\Gamma(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N\}$, pour N entier ≥ 1 fixé. On considère $Y = \{z\in\mathbf{C}/\Im(z)>0\}\cup X$, muni de l'action par homographies de G. L'étude de $\mathcal{C}$ donne lieu à la théorie des symboles modulaires.

3. Soit K un corps. Considérons la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les extensions de corps algébriques L/K et dont les morphismes sont les morphismes d'extensions (*i.e.* les morphismes de K-algèbres), et la catégorie $\mathcal{D}$ dont les objets sont les extensions de corps algébriques L/K et dont les morphismes sont les isomorphismes d'extensions.
3.a. Montrer que $\mathcal{D}$ est un groupoïde.
3.b. Comment se traduit le fait que l'extension L/K est normale en terme de la catégorie $\mathcal{C}$?
3.c. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. L'extension $\bar{K}/K$ est-elle un objet final de $\mathcal{C}$?
3.d. Considérons la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ dont les objets sont les clôtures algébriques de K. Montrer que c'est un groupoïde. En quoi le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ dépend-il du choix de $\bar{K}$? Rapprocher de la question du choix du point base pour définir le groupe fondamental.

4. Soit X un groupoïde possédant un nombre fini d'objets à isomorphisme près (ou équivalent à un tel groupoïde, voir ci-dessous). Sa *masse* est par définition $\mu(X) = \sum 1/|\mathrm{Aut}(X)|$, où la somme porte sur les classes d'isomorphismes d'objets de X. Donner la masse d'un groupoïde donné par une relation d'équivalence à n classes, par un groupe, par un G-ensemble (en terme des ordres des stabilisateurs).
4.a. Montrer que deux groupoïdes équivalents (comme catégories, voir ci-dessus) ont même masse.
4.b. La masse de la somme disjointe de deux groupoïdes X et Y est $\mu(X) + \mu(Y)$.
4.c. Pour n entier ≥ 1, un *revêtement à n feuillets* d'un groupoïde X est un foncteur F d'un groupoïde Y vers X, tel que chaque objet de X possède n images réciproques par F et que tout morphisme $f : x_1 \to x_2$ et tout y_1 objet de Y tel que $F(y_1) = x_1$, il existe un unique morphisme $g : y_1 \to y_2$ tel que $F(g) = f$. Montrer qu'on a $\mu(Y) = n\mu(X)$.
4.d. Montrer que la masse d'un groupoïde est déterminée par les trois propriétés précédentes et le fait que la masse du monoïde trivial (à un objet et un morphisme) est égale à 1.
4.e. Si X correspond à un G-ensemble, pour G groupe fini, X/G est l'ensemble quotient. A-t-on la relation sur les cardinaux $|X| = |G||X/G|$? On définit le groupoïde quotient $X//G$ ainsi (c'est un cas particulier de la notion de quotient d'un groupoïde par un sous-groupoïde, voir ci-dessous). Ses objets sont les éléments de X/G. Les morphismes de $Gx \to Gy$ sont les doubles classes $G_y f G_x$, où f est un morphisme $x \to y$, G_x (resp. G_y) est le stabilisateur de x (resp. y) dans G. La notion $X//G$ se comporte mieux que le passage à l'ensemble quotient X/G . Montrer notamment qu'on a $\mu(X) = |G|\mu(X//G)$.
4.f. Montrer que la masse d'un produit $X \times Y$ de deux groupoïdes X et Y est $\mu(X) \times \mu(Y)$. (Les objets de $X \times Y$ sont les couples d'objets et les morphismes de $X \times Y \to X' \times Y'$ sont les couples de morphismes (f, g), où $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$.)
4.g. On peut étendre la notion de masse aux groupoïdes tels que la somme $\sum 1/|\mathrm{Aut}(X)|$ converge (elle porte sur les objets de X à isomorphisme près). Considérons le groupoïde X dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes sont les bijections. Montrer qu'on a $\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$.

5.a. Un sous-groupoïde Y d'un groupoïde X, est une sous-catégorie de X qui est un groupoïde. Il est dit *normal* dans X si tout objet de Y est un objet de X et si pour toute paire $\{u, v\}$ d'objets de Y, et tout $f \in X(u, v)$, on a $fY(v, v)f^{-1} \subset Y(u, u)$ (stabilité par conjugaison). On définit le *groupoïde quotient* X/Y comme le groupoïde ayant pour objets les classes d'isomorphismes dans Y d'objets de X et pour morphismes $\bar{u} \to \bar{v}$, où u et v sont des objets de X de classes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ respectivement dans X/Y, les classes modulo $Y(v, v)$ (à gauche) et modulo $Y(u, u)$ (à droite) des morphismes $u \to v$ dans X.
5.b. Lorsque X est le groupoïde associé à un G-ensemble, pour G groupe, quels sont les sous-groupoïdes de G ? Sont-ils tous des H-ensembles, pour H groupe ? Quels sont les sous-groupoïdes normaux de X ?

6. On se propose de ramener la classification des groupoïdes à la classification des groupes.
6.a. Montrer qu'un groupoïde s'écrit comme somme disjointe de ses composantes connexes (*i.e.* de ses classes d'isomorphismes).
6.b. Soit E un ensemble et soit G un groupe. On a un "groupoïde grossier" $G \times E \times E$ dont les objets sont les éléments de E, et les morphismes $x \to y$ les éléments de G. Les morphismes de ce monoïde sont donc en correspondance bijective avec $G \times E \times E$.
6.c. Soit X un groupoïde connexe. Soit x un objet de X. Montrer qu'on a un isomorphisme (non-canonique) de groupoïdes $\phi : X \to Aut(x, x) \times X_0 \times X_0$, où ce dernier est un "groupoïde grossier". Pour cela, on choisit un morphisme $g_y : x \to y$ pour tout y objet de X. Pour f morphisme $y \to z$ de X, on pose $\phi(f) = (g_y f g_z^{-1}, y, z) \in Aut(x, x) \times X_0 \times X_0$.

7. Soit X un groupoïde tel que pour tout morphisme c, il n'existe qu'un nombre fini de morphismes a, b tels que $c = a \circ b$. Soit A un anneau commutatif. On note $A[X]$ l'ensemble des applications de l'ensemble des morphismes de X dans A. On définit le *produit de convolution*, pour $f,\, g \in A[X]$, $f * g(c) = \sum_{a \circ b = c} f(a)g(b)$, où la somme parcourt les couples (a, b) de morphismes de X tels que $a \circ b = c$. Montrer que ce produit munit $A[X]$ d'une structure de A-algèbre.

8. Montrer que le jeu de taquin définit un groupoïde. Combien possède-t-il d'objets ? Combien possède-t-il de morphismes ? Mêmes questions pour le cube de Rubik.

Groupe fondamental

1.a. Soit X un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ étoilé autour d'un point (*i.e.* il existe $x_0 \in X$ tel que pour tout $y \in X$, le segment $[x_0, y]$ est contenu dans X). Montrer que X est simplement connexe. En déduire qu'un espace vectoriel réel est simplement connexe. La réunion de deux espaces d'intersection non-vide, chacun étoilé autour d'un point, est-elle toujours simplement connexe ?
1.b. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ privé d'un ensemble étoilé autour d'un point. Montrer que $\mathbf{R}^n - E$ est simplement connexe. En déduire qu'un plan privé d'une demi-droite est simplement connexe.

2. Identifions $\mathbf{S}^1$, la sphère de dimension 1, à l'ensemble des nombres complexes de module 1. Rappeler comment est définie l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin.
2.a. Montrer que $c \mapsto e(c) = \int_c \frac{dz}{2i\pi z} \in \mathbf{Z}$ définit un morphisme de groupes surjectif $\pi_1(\mathbf{S}^1, x_0) \to \mathbf{Z}$, indépendant du choix du point base x_0.
2.b. Montrer que $e(c) = 0$ lorsque c est rétractile.
2.c Posons $c(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$, avec $\theta : [0, 1] \to \mathbf{R}$, continue. Montrer que $e(c) = \theta(1) - \theta(0)$. En déduire que θ, et donc c, est rétractile lorsque $e(c) = 0$.
2.d. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $\pi_1(\mathbf{S}^1, x_0) \to \mathbf{Z}$.
2.e. En déduire que le groupe fondamental du plan privé d'un point est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

3. Soit c un lacet de $\mathbf{C}$. Soit $z \in \mathbf{C}$ en dehors du support de c. L'*indice de c par rapport à z_0* est par définition $\mathrm{Ind}_{z_0}(c) = \int_c \frac{dz}{2i\pi(z-z_0)} \in \mathbf{Z}$.
3.a. Montrer que cet indice est nul en dehors d'un ensemble borné.
3.b. Soit $ABCD$ un carré du plan. Notons V son enveloppe convexe (*i.e.* son intérieur). Existe-t-il un chemin f d'origine A et d'extrémité C dans $\mathbf{C} - V$ et un chemin g d'origine B et d'extrémité D, tels que $f(]0, 1[) \subset \mathbf{C} - V$, et $g(]0, 1[) \subset \mathbf{C} - V$, tels que les images de f et g soient disjointes ? On pourra compléter f pour en faire un lacet F, et considérer l'indice de F par rapport à $g(t)$ lorsque t varie.

4. Considérons la *sinusoïde du topologue* $\mathcal{S}$. C'est le graphe de la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ donnée par $f(x) = \sin(1/x)$ auquel on adjoint le segment $\{0\} \times [-1, 1]$. Faire un dessin.
4.a. Montrer que $\mathcal{S}$ est connexe. Est-il compact, localement compact ?
4.b. Montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas connexe par arc.
4.c. L'espace $\mathcal{S}$ est-il localement connexe par arc ?
4.d. Déterminer le groupe $\pi_1(\mathcal{S}, x_0)$ suivant le choix du point base x_0.
5.e. Le groupoïde fondamental de $\mathcal{S}$ est-il connexe ?