Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Topologie algébrique – Année 2014-15

Feuille 12

Foncteur Tor, coefficients universels

1. Soit Λ un anneau commutatif.
1.a. Soit N un Λ-module plat. Montrer que $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(M,N)=0$, pour tout Λ-module M et tout entier $i>0$.
1.b. Montrer que si N ou M est un Λ-module libre, $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(M,N)=0$, pour tout entier $i>0$.
1.c. Soit $\lambda\in\Lambda$, qui n'est pas un diviseur de 0. Montrer qu'on a $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/(\lambda),N)=\{n\in N/\lambda n=0\}$ (on note $N[\lambda]$ ce dernier Λ-module).
1.d. Montrer que les foncteurs Tor commutent aux sommes directes en chaque terme.
1.e. Montrer que si $\Lambda=\mathbf{Z}$, on a $\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{Z}}(M,N)=0$, pour tout entier $i>1$.
1.f. Soient I et J deux idéaux de Λ. Montrer qu'on a $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\Lambda/I,\Lambda/J)=I\cap J/IJ$.

2. Soit n un entier ≥ 1. Soit X un espace topologique tel que $\mathrm{H}_i(X,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$ si $i=0$ ou $i=3$, tel que $\mathrm{H}_1(X,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et tel que $\mathrm{H}_i(X,\mathbf{Z})=0$ si $i=2$ ou $i>3$.
2.a. Calculer $\mathrm{H}_i(X,\mathbf{Q})$ pour i entier ≥ 0.
2.b. Calculer $\mathrm{H}_i(X,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ pour i entier ≥ 0 et p nombre premier.

CW-complexes

1. Soit n un entier ≥ 0. On rappelle que le n-ème espace projectif réel $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ s'identifie à $\mathbf{S}^n$ modulo la relation antipodale. En particulier, on a un revêtement de degré 2 : $\mathbf{S}^n\to\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. On note $\mathbf{D}^n$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$.
1.a. Donner la structure de CW-complexe de la sphère $\mathbf{S}^0$.
1.b. Montrer que la sphère $\mathbf{S}^n$ a une structure de CW-complexe, dont les i-squelettes sont réduits à des points pour $i<n$ et sont la sphère $\mathbf{S}^n$ pour $i\geq n$.
1.c. Montrer que l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathbf{D}^n$ modulo la relation d'équivalence qui identifie tout point du bord de $\mathbf{D}^n$ à son antipode. On a donc une application continue $\mathbf{D}^n\to\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.
1.d. Montrer par récurrence sur n que l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ admet une une structure de CW-complexe avec une cellule en dimension i ($0\leq i\leq n$) et aucune cellule en dimension $>n$.
1.e. Déterminer les homomorphismes de liaison dans le complexe cellulaire correspondant.
1.f. En déduire les groupes d'homologie de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.

2. Montrer que $\{1/n/n\in\mathbf{Z},n>0\}\cup\{0\}$ n'est pas homéomorphe à un CW-complexe.

3.a. Montrer que $\mathbf{R}$ est un CW-complexe dont les cellules sont de dimensions 0 et 1.
3.b. Soit n un entier ≥ 0. En déduire que $\mathbf{R}^n$ est un CW-complexe.

4. Soit n un entier ≥ 0. Le n-ème espace projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ s'identifie à $(\mathbf{C}^{n+1}-\{0\})/\mathbf{C}^*$.
4.a. Montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ s'identifie à un espace quotient de $\mathbf{S}^{2n+1}$, par l'action d'un groupe isomorphe à $\{z\in\mathbf{C}/|z|=1\}$.
4.b. Montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ s'identifie à un espace quotient de $\mathbf{D}^{2n}$ (la boule unité fermée de $\mathbf{R}^{2n}$).
4.c. En déduire que $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ admet une structure de CW-complexe, dont les cellules sont concentrées en dimension paire.
4.d. En déduire les groupes d'homologie de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

5.a. Soit g un entier ≥ 1. Montrer que la surface S_g à g trous est un CW complexe dont les cellules sont de dimensions 0, 1 ou 2.
5.b. En déduire les groupes d'homologie de S_g.

6. Considérons l'espace X définit comme la sphère $\mathbf{S}^2$ modulo la relation d'équivalence qui identifie deux points aux antipodes de l'équateur de $\mathbf{S}^2$.
6.a. Montrer que c'est un CW-complexe
6.b. En déduire ses groupes d'homologie.

7. Considérons l'espace topologique X (le *parachute*) obtenu en recollant les trois sommets du simplexe Δ_2.
7.a. Montrer que X est un CW-complexe.
7.b. En déduire ses groupes d'homologie.

8. Considérons la *bouteille de Klein* K. Rappelons que K est l'espace obtenu comme quotient du carré $[0,1]^2$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les paires $\{(0,y),(1,y)\}$ $(0 \leq y \leq 1)$ et les paires $\{(x,0),(1-x,1)\}$ $(0 \leq x \leq 1)$. Rappelons que le ruban de Moebius est obtenu comme quotient du carré $[0,1]^2$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les paires $\{(x,0),(1-x,1)\}$ $(0 \leq x \leq 1)$.
8.a. Montrer que c'est un CW-complexe.
8.b. En déduire ses groupes d'homologie.