Feuille 11

Applications de l'homologie

1.a. Soit n un entier ≥ 0. Montrer que la symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$ induit une application de degré -1 sur $\mathbf{S}^n$.
1.b. Soit f une isométrie linéaire de $\mathbf{R}^{n+1}$. Montrer que f induit sur $\mathbf{S}^n$ une application de degré $\det(f)$.
1.c. Retrouver le fait que le degré de l'application antipodale de $\mathbf{S}^n$ est $(-1)^{n+1}$.

2.a. Rappeler ce que sont les groupes d'homologie des sphères.
2.b. Soit n un entier ≥ 0. Soit $a \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $\mathbf{R}^n - \{a\}$ a le type d'homotopie de la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$.
2.c. Soit m un entier ≥ 0 et distinct de n. Montrer $\mathbf{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^m$.

3. Soit n un entier ≥ 0. Posons $\mathcal{H}_n = \mathbf{R}^{n-1} \times [0, +\infty[$ (un “demi-espace”). Le “bord” $\partial\mathcal{H}_n$ de $\mathcal{H}_n$ est $\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. Soit h un homéomorphisme $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$.
3.a. Soit $a \in \mathcal{H}_n - \partial\mathcal{H}_n$. Montrer que $\mathcal{H}_n - a$ a le type d'homotopie de la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$.
3.b. Soit $x \in \partial\mathcal{H}_n$. Montrer qu'on a des isomorphisme de groupes $\mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{H}_n - x, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_{n-1}(\mathcal{H}_n - h(x), \mathbf{Z})$.
3.c. Montrer que $\mathcal{H}_n - \{x\}$ est contractile.
3.d. En déduire que $h(x) \in \partial\mathcal{H}_n$, et donc que $h(\partial\mathcal{H}_n) \subset \partial\mathcal{H}_n$.
3.e. Montrer que $\mathcal{H}_n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^n$.

4. Soit n un entier pair ≥ 0. Soit G un groupe discret qui agit librement et continument sur la sphère $\mathbf{S}^n$.
4.a. Soit $g \in G$. Montrer que le degré de l'homéomorphisme $x \mapsto g.x$ est 1 ou -1.
4.b. Supposons que g n'est pas l'élément neutre de G. Montrer que $x \mapsto g.x$ n'a pas de point fixe. Quel est le degré de cette application ?
4.c. En déduire qu'on a un homomorphisme de groupes $\phi : G \to \{-1, 1\}$, tel que $\phi(g) = -1$ si g n'est pas l'élément neutre de G.
4.d. En déduire que G possède un ou deux éléments. Le dernier cas peut-il se produire ?
4.e. Donner un exemple de groupe d'ordre 2015 agissant librement et continuement sur la sphère $\mathbf{S}^m$, avec m entier impair.

5. Soit n un entier ≥ 0. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et A une partie de $\mathbf{R}^n$. Soit $f : A \to U$ un homéomorphisme.
5.a. Donner un exemple de la situation suivante : X est un espace topologique, Y et U sont des parties de X homéomorphes, U est ouvert dans X, mais Y ne l'est pas.
5.b. Montrer que $\mathbf{R}^n$ est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^n$ privée d'un point N, et que cela identifie les ouverts de $\mathbf{R}^n$ aux ouverts de $\mathbf{S}^n$ qui ne contiennent pas N.
5.c. Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe une boule fermée B de centre $f(x)$, de rayon > 0 et contenue dans U. Notons ∂B le bord de B.
5.d. Montrer que $f^{-1}(\partial B)$ est une partie de $\mathbf{S}^n$ homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1}$.
5.e. Montrer que $\mathbf{S}^n - f^{-1}(\partial B)$ a deux composantes connexes.
5.f. Montrer que ces composantes connexes sont $f^{-1}(B - \partial B)$ et $\mathbf{S}^n - f^{-1}(B)$.
5.g. En déduire que $x \in f^{-1}(B - \partial B)$.
5.h. En déduire que A est un ouvert de $\mathbf{S}^n$ et donc de $\mathbf{R}^n$. (On a montré que toute partie de $\mathbf{R}^n$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est ouverte dans $\mathbf{R}^n$. C'est le *théorème de l'invariance du domaine.*)

6. Soient n et m des entiers ≥ 0, avec $m > n$. Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. Soit $\phi : [0, 1]^m \to A$ un homéomorphisme hypothétique. Notons U l'image de $]0, 1[^m$ par ϕ.
6.a. Soit $x \in]0, 1[^m$. Montrer qu'il existe $V \subset]0, 1[^m$ contenant x et telle que V est homéomorphe à $]0, 1[^n$.
6.b. Montrer que $\phi(V)$ est ouvert dans $\mathbf{R}^n$ (voir le théorème de l'invariance du domaine).
6.c. En déduire que U est ouvert dans $\mathbf{R}^n$.
6.d. Montrer qu'on a $\mathrm{H}_n(U, U - \phi(x), \mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \phi(x), \mathbf{Z})$.
6.e. Montrer qu'on a $\mathrm{H}_n(]0, 1[^m,]0, 1[^m - \{x\}, \mathbf{Z}) = 0$.
6.f. Conclure qu'aucune partie de $\mathbf{R}^n$ n'est homéomorphe à $[0, 1]^m$.