Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Topologie algébrique – Année 2014-15

Feuille 10

Homologie

1. Soit K un corps. Soit $C_\bullet$ un complexe de K-espaces vectoriels (*i.e.* un K-espace vectoriel différentiel gradué). Supposons que C_k est de dimension finie sur K pour tout entier k et que $C_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers i. Le nombre $\chi(C) = \sum_k (-1)^k \dim_K \mathrm{H}_k(C)$ s'appelle la *caractéristique d'Euler(-Poincaré)* de $C_\bullet$. Montrer que $\chi(C) = \sum_k (-1)^k \dim_K(C_k)$.

2. Considérons l'espace X topologique obtenu en recollant les trois sommets du simplexe Δ_2. (On appelle quelquefois X un *parachute*.)
2.a. Montrer que X a le même type d'homotopie que l'espace obtenu en ajoutant à Δ_2 quelques segments.
2.b. En déduire que X a le même type d'homotopie qu'un bouquet de deux cercles.
2.c. En déduire que $\mathrm{H}_0(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $\mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^2$ et $\mathrm{H}_2(X, \mathbf{Z}) = 0$.

3. Considérons le bouquet B de deux copies de $\mathbf{S}^1$ et d'une copie de $\mathbf{S}^2$. On peut noter $B = \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^2$.
3.a. Quels sont les groupes d'homologie de B ?
3.b. Montrer qu'ils sont isomorphes aux groupes d'homologie de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$.
3.c. Montrer que B et $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ ne sont pas homotopiquement équivalents.

4. Considérons la *bouteille de Klein*. C'est l'espace K obtenu comme quotient du carré $[0,1]^2$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les paires $\{(0,y),(1,y)\}$ $(0 \leq y \leq 1)$ et les paires $\{(x,0),(1-x,1)\}$ $(0 \leq x \leq 1)$. Rappelons que le ruban de Moebius est obtenu comme quotient du carré $[0,1]^2$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les paires $\{(x,0),(1-x,1)\}$ $(0 \leq x \leq 1)$.
4.a. Montrer que M est homotopiquement équivalent à $\mathbf{S}^1$. En déduire ses groupes d'homologie.
4.b. Montrer qu'on peut recouvrir K par deux rubans de Moebius.
4.c. Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris qui s'en déduit pour calculer l'homologie de K.
4.d. Montrer qu'on a $\mathrm{H}_0(K, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $\mathrm{H}_1(K, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathrm{H}_n(K, \mathbf{Z}) = 0$ (n entier ≥ 2).
4.e. Que trouve-t-on si on calcule $\mathrm{H}_0(K, \Lambda)$, pour Λ anneau commutatif, en particulier de caractéristique 2 ?

5. Considérons la *sinusoïde du topologue*. C'est-à-dire l'adhérence dans $\mathbf{R}^2$ du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ (x réel > 0). Déterminer ses groupes d'homologie.

6. Soit n un entier ≥ 1. Considérons l'espace topologique R_n obtenu comme quotient de $\cup_{i=1}^n \mathbf{R} \times \{i\}$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les n-uplets $\{(x,1),(x,2),...,(x,n)\}$ ($x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$). C'est la *droite à n origines*.
6.a. Écrire une suite exacte longue de Mayer-Vietoris qui relie les groupes d'homologie de R_n à ceux de R_{n-1}.
6.b. Montrer qu'on a $\mathrm{H}_0(R_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $\mathrm{H}_1(R_n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{n-1}$ et $\mathrm{H}_i(R_n, \mathbf{Z}) = 0$ (i entier ≥ 2).

7. Soit g un entier ≥ 0. Soit X_g l'espace topologique obtenu en ôtant $2g$ disques ouverts deux à deux disjoints de la sphère $\mathbf{S}^2$. Considérons S_g (resp. S'_g) la surface obtenue en joignant par paires les trous de X_g au moyen de g tunnels cylindriques deux à deux disjoints (resp. tels qu'il existe un point O autour duquel est étoilé l'intersection des intérieurs d'un nombre quelconque de ces g cylindres, en particulier l'intersection commune des intérieurs des cylindres contient O). Soit n un entier ≥ 1. Considérons l'espace $S_{g,n}$ obtenu en privant S_g de n points distincts.
7.a. Montrer que X_g est homotope à un bouquet de $2g-1$ cercles.
7.b. En déduire que $\mathrm{H}_0(X_g, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $\mathrm{H}_1(X_g, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{2g-1}$ et $\mathrm{H}_i(X_g, \mathbf{Z}) = 0$ (i entier ≥ 2).
7.c. Considérons l'injection canonique $\pi : \coprod_{i=1}^g \mathbf{S}^1 \to X_g$ (chaque copie de $\mathbf{S}^1$ est identifiée au bord de l'un des disques que l'on a ôté de $\mathbf{S}^2$). Décrire l'application $\pi_* = \mathrm{H}_i(\pi) : \mathrm{H}_i(\coprod_{i=1}^g \mathbf{S}^1, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_i(X_g, \mathbf{Z})$, pour $i = 0$ et $i = 1$.
7.d. Montrer qu'on a $\mathrm{H}_0(S_g, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $\mathrm{H}_1(S_g, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{2g-2}$, $\mathrm{H}_2(S_g, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ et $\mathrm{H}_i(S_g, \mathbf{Z}) = 0$ (i entier ≥ 3).
7.e. Montrer que $S_{g,n}$ est homotope à un bouquet de $2g+n-1$ cercles. En déduire qu'on a $\mathrm{H}_0(S_{g,n}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $\mathrm{H}_1(S_{g,n}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{2g+n-1}$ et $\mathrm{H}_i(S_{g,n}, \mathbf{Z}) = 0$ (i entier ≥ 2).

7.f. Montrer que S'_g est recouvert par deux ouverts homotopiquement équivalents à X_g. En déduire les groupes d'homologie de S'_g.
7.g. Soit C un cube dans lequel on a creusé trois tunnels passant par le centre parallèlement à chacun des trois axes. Déterminer les groupes d'homologie de C.