Université Paris Diderot Topologie algébrique – Année 2014-15
M1 mathématiques

Feuille 1

Catégories

1. Considérons les catégories dont les objets sont dans les liste suivantes. Indiquer quels sont les morphismes raisonnables dans chaque cas. Trouver dans chaque question trois autres catégories analogues.
1.a. Les ensembles. Les ensembles non vides. Les ensembles pointés. Les ensembles filtrés (c'est-à-dire munis d'une suite décroissante de sous-ensembles). Les ensembles ordonnés. Les ensembles finis orientés.
1.b. Les graphes. Les ensembles munis d'une relation. Les ensembles munis d'une relation d'équivalence.
1.c. Les monoïdes. Les groupes. Les G-ensembles (G groupe fixé). Les groupes abéliens. Les groupes abéliens sans torsion. Les groupes abéliens de torsion. Les anneaux. Les corps. Les A-modules (A anneau commutatif fixé). Les A-modules de type fini. Les A-modules noethériens. Les espaces vectoriels euclidiens.
1.d. Les espaces topologiques. Les espaces topologiques pointés. Les espaces métriques.

2. Montrer qu'un ensemble ordonné définit une petite catégorie (une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *petite* si ses objets constituent un ensemble, et $\mathcal{C}(X, Y)$ est un ensemble pour X, Y objets de $\mathcal{C}$). En déduire que l'ensemble des parties d'un ensemble E définit une catégorie dont les morphismes sont les relations d'inclusion. Qu'en est-il des ouverts d'un espace topologique donné ? Des sous-espaces d'un espace vectoriel donné ?

3. Montrer qu'une catégorie à un seul objet n'est autre qu'un monoïde (*i.e.* un ensemble muni d'une loi interne associative avec un élément neutre). À quelle condition est-ce un groupe ?

4. Montrer que si un morphisme f possède un inverse, alors cet inverse est unique et est lui-même un isomorphisme.

5. Soit $f_1 : X \to Y$ et $f_2 : Y \to Z$ deux morphismes.
5.a. Montrer que si $f_2 \circ f_1$ est un monomorphisme, alors f_1 est un monomorphisme.
5.b. Montrer que si $f_2 \circ f_1$ est un épimorphisme, alors f_2 est un épimorphisme.
5.c. Montrer que le composé de deux épimorphismes (resp. monomorphismes) est un épimorphisme (resp. monomorphisme).

6. Considérons la catégorie des espaces topologiques, dont les morphismes sont les applications continues. Montrer que l'inclusion de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ est un monomorphisme et un épimorphisme, sans être un isomorphisme. Même question pour l'inclusion de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}$ pour la catégorie des groupes abéliens.

7. Considérons la catégorie des groupes abéliens divisibles, dont les morphismes sont les morphismes de groupes. (On rappelle qu'un groupe $(G, +)$ est dit *divisible* si pour tout $x \in G$ et tout entier $n \geq 1$, il existe $y \in G$ tel que $ny = x$.) Montrer que $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ sont des groupes divisibles. Montrer que la surjection canonique $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est un monomorphisme dans cette catégorie, mais pas un monomorphisme dans la catégorie des groupes.

8. Soit $f : X \to Y$ un morphisme. Une *section* $s : Y \to X$ de f est un inverse à droite de f, *i.e.* on a $f \circ s = \mathrm{id}_Y$. Une *rétraction* $r : Y \to X$ de f est un inverse à gauche de f, *i.e.* on a $r \circ f = \mathrm{id}_X$.
8.a. Montrer que si f admet une section c'est un épimorphisme, puis que si elle admet une rétraction c'est un monomorphisme.
8.b. Montrer qu'il existe des monomorphismes sans rétraction et des épimorphismes sans section.
8.c. Montrer que tout monomorphisme qui admet une section est un isomorphisme, de même que tout épimorphisme qui admet une rétraction est un isomorphisme.

9. Un *objet initial* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet X_0 tel que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $X_0 \to X$. Montrer qu'un objet initial est unique à isomorphisme près. Montrer que $\mathbf{Z}$ est un objet initial de la catégorie des anneaux. La catégorie des groupes admet-elle un objet initial ? La catégorie des ensembles ? La catégorie des espaces vectoriels sur un corps fixé ?

10. Considérons la *catégorie de Peano* dont les objets sont les triplets (X, x_0, s) où X est un ensemble non vide, $x_0 \in X$ et s est une application $X \to X$. Les morphismes $(X, x_0, s) \to (Y, y_0, t)$ dans cette catégorie

sont les applications $f : X \to Y$ telles que $f(x_0) = y_0$ et $f \circ s = t \circ f$. Montrer que $(\mathbf{N}, 0, x \mapsto x + 1)$ est un objet initial de la catégorie de Peano. Est-ce une meilleure définition de $\mathbf{N}$ que celle qui voit en les entiers les classes d'équivalences d'ensembles finis pour la relation d'équipotence ?

Foncteurs et transformations naturelles

1. Montrer qu'on a un foncteur de la catégorie des anneaux vers la catégorie des groupes qui à A associe A^*. Est-ce un foncteur de la catégorie des anneaux topologiques vers les groupes topologiques ?

2. Considérons la catégorie dont les objets sont les petites catégories, et dont les morphismes sont les foncteurs. Justifier qu'il s'agit bien là d'une catégorie. Cela permet-il de voir les morphismes de monoïdes, les morphismes de groupes, les applications croissantes comme des foncteurs ?

3. Montrer qu'on a un foncteur covariant (resp. contravariant) $\mathcal{P}$ de la catégorie des ensembles dans la catégorie des ensembles ordonnés qui à X associe l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. Il associe au morphisme $f : X \to Y$ l'application qui à une partie A de X (resp. Y) l'image directe (resp. l'image réciproque) de A par f. Est-il fidèle ? Est-il plein ?

4. Soit K un corps commutatif. Montrer qu'on a un foncteur contravariant de la catégorie des K-espaces vectoriel dans elle même donné par le passage à l'espace vectoriel dual.

5. Soit X un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$. Montrer qu'on a un foncteur covariant et un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles qui envoie Y vers $\mathcal{C}(X, Y)$ et $\mathcal{C}(Y, X)$ respectivement.

6. Soit G et H deux groupes. Soient f_1 et f_2 deux morphismes $G \to H$. Voyons G et H comme des catégories. Alors f_1 et f_2 sont des foncteurs. Notons o l'unique objet de la catégorie G. Soit $h \in H$. Montrer que $o \mapsto h$ est une transformation naturelle de f_1 vers f_2 si et seulement si on a $f_2(g) = hf_1(g)h^{-1}$ $(g \in G)$.

7. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les paires (X, R), où X est un ensemble et R est une relation d'équivalence sur X. Un morphisme $(X, R) \to (Y, S)$ de $\mathcal{C}$ est une application $f : X \to Y$ qui vérifie que si xRy on a $f(x)Sf(y)$ $(x, y \in X)$. Montrer qu'on a deux foncteurs F et G de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles, qui sont donnés par $F(X, R) = X$ et $G(X, R) = X/R$ (passage au quotient par R), et dont on complétera la définition. Déterminer toutes les transformations naturelles de F vers G.

8. Soit G le foncteur (de la catégorie des graphes) qui envoie tout graphe sur le graphe opposé, et tout morphisme de graphe sur lui-même. Montrer qu'il n'existe aucune transformation naturelle du foncteur identité vers G.

9.a. Notons I le foncteur identité de la catégorie des ensembles vers elle-même. Déterminer toutes les transformations naturelles de I vers lui-même.
9.b. Même question si on se limite aux ensembles à deux éléments et aux morphismes qui sont des bijections.
9.c. Notons Δ le foncteur, de la catégorie des ensembles vers elle-même, qui envoie tout ensemble X sur $X \times X$, et toute application f vers $f \times f$. Montrer qu'il existe une unique transformation naturelle de I (foncteur identité) vers Δ. Montrer qu'il existe exactement deux transformations naturelles de Δ vers I.
9.d Soit n un entier ≥ 1. Notons Δ_n le foncteur, de la catégorie des ensembles vers elle-même, qui envoie tout ensemble X sur $X \times ... \times X$ (produit cartésien de n copies de X). Soit m un entier ≥ 1. Déterminer toutes les transformations naturelles de Δ_n vers Δ_m.

10. Considérons la catégorie $\mathcal{C}$ des ensembles finis orientés, dont les morphismes sont les bijections qui préservent l'orientation. Considérons le foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ qui envoie (X, o) vers (X, o^*) (X ensemble fini, o orientation de X, o^* orientation opposée) et un morphisme f vers lui-même. Trouver une transformation naturelle du foncteur identité vers F.

11. Considérons la catégorie $\mathcal{A}$ formé des objets : chambre, cuisine, salon, lit, réfrigérateur, fauteuil. Ses morphismes sont lit $\to$ chambre, réfrigérateur $\to$ cuisine, et fauteuil $\to$ salon. La catégorie $\mathcal{A}'$ est formée des objets : chambre, cuisine américaine, bureau, lit, réfrigérateur, fauteuil. Ses morphismes sont lit $\to$ chambre, réfrigérateur $\to$ cuisine américaine, et fauteuil $\to$ cuisine américaine. Décrire le foncteur "camion de déménagement" de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}'$. (Suite au décès de A. Grothendieck à l'automne 2014, un journaliste de France Culture demande à P. Lochak : "Qu'est-ce qu'un foncteur ?". Réponse : "C'est un camion de déménagement".)