Université Paris Diderot Analyse complexe – Année 2011-12
L3 mathématiques

Feuille 8

La formule des résidus

1.a Considérons le lacet γ du plan complexe donné par $t \mapsto x(t) + iy(t)$, où $x(t) = \sin(2\pi t)/(1 + \cos^2(2\pi t))$ et $y(t) = \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)/(1 + \cos^2(2\pi t))$. C'est la paramétrisation de la *lemniscate de Bernoulli.* Faire un dessin.
1.b. Considérons le lacet δ du plan complexe obtenu en composant l'opposé du lacet circulaire centré en $1/2$ et de rayon $1/2$ et le lacet circulaire centré en $-1/2$ et de rayon $1/2$. Les lacets γ et δ sont-ils strictement homotopes dans $\mathbf{C} - \{-1/2, 1/2\}$?
1.c. Calculer $\int_{\mathcal{C}(1/2,1/2)} dz/(z^2 - 1/4)$ et $\int_{\mathcal{C}(-1/2,1/2)} dz/(z^2 - 1/4)$
1.d. En déduire $\int_\gamma dz/(z^2 - 1/4)$.

2. Soit R un nombre réel > 1. Considérons les chemins c et d de $\mathbf{C}$ donnés par $c(t) = 2Rt - R$ et $d(t) = Re^{i\pi t}$.
2.a Montrer que le chemin composé de c et d est un lacet, noté γ.
2.b Quels sont les pôles de la fonction méromorphe $f : z \mapsto e^{iz}/(1 + z + z^2)$?
2.c Quels sont les résidus de cette fonction ?
2.d Quels sont les indices du lacet γ par rapport à ces pôles?
2.e Calculer $\int_\gamma f(z)\,dz$.
2.f Montrer que $\int_d f(z)\,dz \to 0$ lorsque $R \to \infty$.
2.g En déduire les formules pour les intégrales réelles $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)\,dx/(1 + x + x^2) = 2\pi e^{-\sqrt{3}/2}\cos(1/2)/3$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,dx/(1 + x + x^2) = -2\pi e^{-\sqrt{3}/2}\sin(1/2)/3$

3. Soit R un entier > 0. Considérons les chemins c_1, c_2, c_3 et c_4 de $\mathbf{C}$ donnés par les formules suivantes : $c_1(t) = R(t-1) - t/R$, $c_2(t) = -e^{-i\pi t}/R$, $c_3(t) = (1-t)/R + tR$ et $c_4(t) = Re^{i\pi t}$.
3.a Représenter graphiquement ces chemins.
3.b Montrer que le chemin c composé de c_1, c_2, c_3 et c_4 est un lacet.
3.c Déterminer les pôles dans $\mathbf{C}$ et les résidus correspondants de $z \mapsto e^{iz}/z$.
3.d Calculer $\int_c (e^{iz}/z)\,dz$.
3.e Montrer que $\Im(\int_{c_1}(e^{iz}/z)\,dz + \int_{c_3}(e^{iz}/z)\,dz)$ tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin(x)/x)\,dx$ lorsque R tend vers l'infini.
3.f Montrer que $\Im(\int_{c_2}(e^{iz}/z)\,dz)$ tend vers π lorsque R tend vers l'infini.
3.g Montrer que $\int_{c_4}(e^{iz}/z)\,dz$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.
3.h En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin(x)/x)\,dx$.

4.a Démontrer qu'il existe une unique fonction méromorphe f sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$ qui vérifie

$$f(x) = \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}$$

($x \in \mathbf{R}_- - \{-1, -2\}$).
4.b Que valent alors $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x - i\epsilon)$ et $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x + i\epsilon)$, lorsque $x \in \mathbf{R}$ et $x > 0$?
4.c Déterminer les pôles et les résidus de f.
4.d Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}\,dx.$$

5. Calculer les intégrales: $\int_0^\infty [1/(1+x^4)]dx$, $\int_0^\infty [(1+x^2)/(1+x^4)]dx$ et $\int_0^\infty [1/(1+x^2+x^4)]dx$.